EDO : EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

DEF: È UN'EQUAZIONE IN CUI L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE $t \to y(t)$

- E VI COMPAIONO LA VARIABILE INDIPENDENTE (QUI È t)
- LA VARIABILE DIPENDENTE y, OSSIA LA FUNZIONE STESSA,
- E ALCUNE SUE DERIVATE (y', y'', y''' ETC)

ESEMPIO

$y \cdot y' = 2t^3 \qquad (1) \quad \to$ PRIMO ORDINE

- IO CERCO UNA FUNZIONE $t \to y(t)$ CHE SODDISFI LA (1) $\forall t \in I$ DOVE I È UN DETERMINATO INTERVALLO DI $\mathbb{R}$ $\Rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$

CLASSIFICAZIONE DELLE EDO

ALTRO ES. DI EDO : $y \cdot y'' = t \cdot y''' \quad t \in I \quad \to$ TERZO ORDINE (IN BASE AL MASSIMO ORDINE DELLE DERIVATE)

ESEMPIO

$y \cdot y' = 2t^3 \quad \to$ TROVARE FUNZIONE:

PROPOSTA: $y(t) = t^2$ VERIFICA

$t^2 \cdot 2t = 2t^3$ VERO! $\forall t \in \mathbb{R} = I$

ALTRA PROPOSTA: $y(t) = c \cdot t^2 \quad c \in \mathbb{R}$

VERIFICA: $ct^2 \, \cancel{2}ct = \cancel{2}t^3$ $\quad c^2 = 1$ / $c = 1$, $c = -1$

$c^2t^3 = t^3$

$c^2t^3 = t^3$

$y(t) = -t^2$

EDO 1° ORDINE IN FORMA NORMALE

$$(+) \qquad y'(t) = f(t, y(t))$$

$t \to y(t)$ INCOGNITA

- f È UNA FUNZIONE ASSEGNATA (È UN DATO DEL PROBLEMA)

È DEFINITA IN UN QUALCHE SOTTODOMINIO DI $\mathbb{R}^2$ (2 VARIABILI)

- f CONTINUA

→ $\boxed{\text{SOTTO CASO}}$: $f(t, y) = f(t)$

LA FUNZIONE f DIPENDE SOLO DALLA PRIMA VARIABILE

CIOÈ:

$y'(t) = f(t)$ F È UNA PRIMITIVA DI f

INTEGRO:

$$\underbrace{y(t) = \int f(t)\,dt = F(t) + c}_{\text{INTEGRALE GENERALE} \rightarrow \text{TOTALITÀ DELLE SOLUZIONI}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO (SOTTOCASO)

$y' = 3t^2$ $\quad f(t, y) = 3t^2 = f(t)$ $\quad D: \mathbb{R}$

$Y(t) = t^3 + c \rightarrow D: \mathbb{R}$

PROBLEMA UNICITÀ DELLE SOLUZIONI

$Y(1) = 2$ CONDIZIONE INIZIALE

PROCEDURA:

TROVARE INTEGRALE GENERALE E POI IMPORRE CONDIZIONE INIZIALE

$Y(t) = t^3 + c \Rightarrow Y(1) = 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$

SOLUZIONE: $Y(t) = t^3 + 1$

CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) & t \in I \subseteq \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY (P.C.)

SOTTO IPOTESI DI "REGOLARITÀ" DELLA f
IL P.C. HA UNA SOLA SOLUZIONE

- ATTENZIONE!
  LA CONDIZIONE INIZIALE POTREBBE NON AVERE SENSO

ESEMPIO

$$\begin{cases} t \cdot y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

P.C.
→ PRESUPPONE CHE ZERO $\in I$

APPLICHIAMO L'EQUAZIONE IN $t = 0$ $\quad 0 \cdot y'(0) = 1 = 0$ $\quad \underline{\text{NO}}$

⇒ LA MIA EQUAZIONE NON PUÒ ESSERE SODDISFATTA IN ZERO
↳ QUINDI LA CONDIZIONE È PRIVA DI SENSO

METTO IN FORMA NORMALE:

$$y' = \frac{1}{t} \quad \forall t \neq 0 \qquad f(t) = \frac{1}{t} \qquad D_f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1^0 CASO DI EDO FORMA NORMALE 1^0 ORDINE

EQ. A VARIABILI SEPARABILI

$$y'(t) = a(t) \cdot b(y)$$

$$f(t, y) = a(t) \cdot b(y)$$

$t \to a(t)$ FUNZ. CONTINUA SU UN INTERVALLO $I \subseteq \mathbb{R}$ DATO DEL PROBLEMA

$y \to b(y)$ FUNZ. CONTINUA SU UN INTERVALLO $J \subseteq \mathbb{R}$ DATO DEL PROBLEMA

- ALLARME! QUESTA POTREBBE ESSERE FANTAMATEMATICA (METODO NON CONVENZIONALE)

$$y' = \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = a(t) \cdot b(y)$$

NON È UN RAPPORTO!!! MA LO TRATTO COME TALE

SUPPONGO CHE $b(y) \neq 0$

DIVIDO AMBO I MEMBRI PER $b(y)$

$$\frac{1}{by} \frac{dy}{dt} = a(t)$$

MOLTIPLICO PER dt AMBO

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)\,dt$$

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\,dt$$

B PRIMITIVA DI $\frac{1}{b(y)}$

A PRIMITIVA DI $a(t)$

$$B(y) = A(t) + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

LA y (SOLUZIONE) NON È ESPLICITABILE IN GENERE....

LA B È INVERTIBILE E SE APPLICO AD AMBO I MEMBRI LA B^{-1}

$$y(t) = B^{-1}(A(t) + c) \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

MA ABBIAMO TRASCURATO IL CASO $b(y) = 0$

ALLORA: $\exists\, k \in \mathbb{R} : b(k) = 0$?

$y' = a(t)\, b(y)$

$y(t) = k$ FUNZIONE COSTANTE $D: \mathbb{R}$

È UN ALTRA SOLUZIONE

VERIFICA: $y'(t) = 0 = a(t)\, b(k) = 0$ È SOLUZIONE

IN SINTESI, L'INTEGRALE GENERALE È:

$$\begin{cases} y(t) = B^{-1}(A(t) + c) & b(y) \neq 0 \\ y(t) = k & b(k) = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

TROVARE INTEG. GENERALE DI

$y' = t y^3$ $\quad a(t) = t \quad D: \mathbb{R}$

$\quad b(y) = y^3 \quad D: \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dt} = t y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = t\, dt$$

INTEGRO

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int t\, dt$$

$\Downarrow$ PRIMITIVA $\quad \Downarrow$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} t^2 + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

MOLTIPLICO PER 2

$$-\frac{1}{y^2} = t^2 + 2c$$

CHE È COME SCRIVERE C ARBITRARIO $\quad -\frac{1}{y^2} = t^2 + c$

$$\frac{1}{y^2} = -t^2 - 2c$$

$$y^2(t) = \frac{1}{t^2 - 2c}$$

RADICE

$$y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2c}}$$

SOLUZIONE ESPLICITABILE

LA b SI ANNULLA SOLO IN $k = 0$

AGGIUNGO $y(t) = 0$ $\quad D: \mathbb{R}$

TROVARE DOMINIO: $\quad$ CON $c \leq 0$ NO SOLUZIONE

$I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow c - t^2 > 0 \rightarrow t^2 < c \rightarrow t < \pm\sqrt{c}$

CON $c > 0$ HO $I = -\sqrt{c} < t < \sqrt{c}$

ESERCIZIO P. C.

$$\begin{cases} y' = t y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{c-t^2}}$$

DEVO TROVARE QUESTO : SCARTO OPZIONE CON IL MENO

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{c-t^2}}$$

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{c-0}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

PER $c = 1$ LA CONDIZIONE INIZIALE È SODDISFATTA

SOLUZIONE CONDIZIONE GENERALE :

$$y(t) = + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow I =]-1, 1[$$

ES. P.C.

$$\begin{cases} y' = t y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ L'UNICA SOL. È LA COSTANTE:

$y = 0$