PROBLEMI DI CAUCHY CON EDO A VARIABILI SEPARABILI

$$* \begin{cases} y' = a(t) \cdot b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{lll} t \to a(t) & \text{CONT.} & I \\ y \to b(y) & \text{CONT.} & J \\ t_0 \in I & & \end{array}$$

ESISTE SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE $y(t)$ SU I CON $t_0 \in I$ DI *

- SE b È C^1 IN UN INTORNO DI y_0

  OPPURE
- $b(y_0) \neq 0$

  ALLORA HO L'UNICITÀ DELLE SOLUZIONI DI *

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

→ NON C'È $a(t)$ OPPURE $a(t) = 1$ ⟹ $b(y) = 2\sqrt{y}$

$b'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ NON ESISTE IN ZERO

SCOPO: TUTTE y A SINISTRA E t A DESTRA

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y} \implies \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\,dt$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2\,dt$$

PROPOSTA:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2\sqrt{y} \qquad (2\sqrt{y})' = 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}} \quad \checkmark$$

IN GENERALE: PER FORMULARLO

$$\boxed{\int y^{\alpha}\,dy = \frac{1}{1+\alpha}\,y^{1+\alpha}}$$

ALLORA:

$$2\sqrt{y} = 2t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{y} = t + c \overset{\text{ELEVO}^2}{\implies} y(t) = (t+c)^2$$

IMPONGO COND. INIZIALE $y(0) = 0$

$$y(0) = 0 = c^2 \implies c = 0$$

SOLUZIONE: $y(t) = t^2$

↳ È L'UNICA SOLUZIONE? NO

PRENDO FUNZ. COSTANTE

$y(t) = 0$ FUNZ. NULLA

$y'(t) = 0$

→ È UN'ALTRA SOLUZIONE : PERDITA UNICITÀ

ESEMPIO ANOMALO

$$y' = \frac{2t}{1+\ln(y)} \qquad \begin{aligned} a(t) &= 2t \\ b(y) &= \frac{1}{1+\ln(y)} \end{aligned} \Rightarrow D: \left]0,+\infty\right[\setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+\ln(y)} \Rightarrow [1+\ln(y)]\,dy = 2t\,dt$$

INTEGRO

$$\int (1+\ln(y))\,dy = \int 2t\,dt$$

$$y + \int \ln(y)\,dy = t^2 + c \quad \xRightarrow{\text{PER PARTI:}} \quad \int \ln(y)\,dy = y\ln(y) - y$$

$$\cancel{y} + y\ln(y) - \cancel{y} = t^2 + c \Rightarrow y\ln(y) = t^2 + c$$

DEVO ARRIVARE A ... $y(t) =$ FORMA ESPLICITA

NON RIESCO AD OTTENERE LA FORMA ESPLICITA

$$B(y) = A(t) + c$$

$$y(t) = \underbrace{B^{-1}}_{}(A(t)+c)$$

→ NON È ESPLICITA ALLORA NEANCHE $y(t)$ È ESPLICITA

ESERCIZIO D'ESAME

TROVARE L'INTEGRALE GENERALE (TOTALITÀ SOLUZIONI) DI

$$y' = \frac{x(y-1)^3}{\sqrt{1+x^2}} \qquad b(y) = (y-1)^3$$

$$k = 1 \longrightarrow b(y) = 0$$

E TROVARE LE SOL. DEI P.C.

A) $y(0) = 1/2$
B) $y(0) = 1$

E I RELATIVI DOMINI "MASSIMI" DELLE 2 SOLUZIONI (DEI 2 P.C.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y-1)^3}{\sqrt{1+x^2}} \qquad f(x) = 1+x^2 \qquad \alpha = -1/2 \qquad f' = 2x$$

$$\frac{dy}{(y-1)^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{(y-1)^3}\,dy}_{} = \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}_{}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(y-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{1/2} + c$$

FORMULARIO

$$\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{1+\alpha} \qquad \alpha \neq -1$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(y-1)^2} = \sqrt{1+x^2} + c$$

$$\frac{1}{(y-1)^2} = c - 2\sqrt{1+x^2}$$

$$(y-1)^2 = \frac{1}{c-2\sqrt{1+x^2}}$$

$$y-1 = \pm\frac{1}{\sqrt{c-2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$y(x) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{c-2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$y(x) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{c-2\sqrt{1+x^2}}} \quad \cup \quad y(x) = 1 \Longrightarrow \text{INTEGRALE GENERALE}$$

A) $y(0) = 1/2$

$$y(0) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{c-2}} = \frac{1}{2}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{c-2}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{SCARTO IL } + \text{ E TENGO IL } -$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c-2}} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow c-2 = 4 \Longrightarrow c = 6$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{1+x^2}}}$$

- DOMINIO MASSIMO SI INTENDE L'INTERVALLO I PIÚ ESTESO POSSIBILE CHE CONTENGA IL PUNTO INIZIALE $x_0 = 0$ E APPARTENGA AL DOMINIO DELLA SOLUZIONE

$$D: \; 6 - 2\sqrt{1+x^2} > 0$$

$$2\sqrt{1+x^2} < 6 \Longrightarrow \sqrt{1+x^2} < 3 \Longrightarrow 1+x^2 < 9 \Longrightarrow x^2 < 8$$

$\hookrightarrow \underbrace{-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}}$

$\hookrightarrow$ CONTIENE $x_0 = 0$

$\hookrightarrow$ DOMINIO MASSIMO TROVATO

B) $y(0) = 1 \Rightarrow$ SOLUZIONE COSTANTE $\to y(x) = 1$ $D = \mathbb{R}$

EDO LINEARI 1° ORDINE

FORMA NORMALE

$$y'(t) + \underbrace{a(t)}_{\text{coeff.}} y(t) = \underbrace{f(t)}_{\text{termine noto}}$$

$t \to a(t)$ CONTINUA SU I } SONO
$t \to f(t)$ " " I } DATI DEL PROBLEMA

- ESISTE SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE
  IL P.C. ASSOCIATO

$$\begin{cases} y' + ay = f & t \in I \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I \end{cases}$$

HA <u>UNA</u> SOLA SOLUZIONE

- QUANDO $f(t) = 0$ $y' + a(t)y = 0 \Rightarrow$ CASO OMOGENEO

PARTIAMO DAL CASO OMOGENEO:

$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \Rightarrow y' + a(t)y = 0$

$y' = -a(t)y \Rightarrow$ EQ. A VARIABILI SEPARABILI !!!
$b(y) = y$

RISOLVO COME AL SOLITO

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)\cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(t)\,dt$$

PONGO

$$A(t) = \int a(t)\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -a(t)\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -A(t) \Rightarrow \ln(|y|) = -A(t) + c$$

$$|y(t)| = e^{-A(t)+c} = e^c \cdot e^{-A(t)} = k\cdot e^{-A(t)}$$

$k = e^c \Rightarrow k > 0$

$$y(t) = \pm k e^{-A(t)} \Rightarrow y(t) = c e^{-A(t)} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$y(t) = 0$

SOLUZIONE GENERALE $\boxed{y_0(t) = c e^{-A(t)}}$ $c \in \mathbb{R}$ DEL CASO OMOGENEO

TEOREMA PER CASO NON OMOGENEO:

INTEGRALE GENERALE $y(t)$ DEL CASO COMPLETO $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

y_0: GENERALE OMOGENEA

y_p: ↳ SOL. PARTICOLARE DELLA COMPLETA

COME TROVARE $y_p(t)$:

$y' + a(t)y = f(t)$ ⇒ COMPLETA

$y' h(t) + y\, a(t)\, h(t) = f(t)\, h(t)$ $h(t) = ?$ $h(t) > 0 \quad \forall t \in I$

TH. PRODOTTO:

$(g_1(x) \cdot g_2(x))' = g_1'(x) \cdot g_2(x) + g_1(x) \cdot g_2'(x)$

$[y \cdot ?]' = f(t) \cdot h(t)$

SCELGO

$h(t) = e^{A(t)}$

$y' \cdot e^{A(t)} + y\, a(t)\, e^{A(t)} = f(x)\, e^{A(t)}$

$[y \cdot e^{A(t)}]' = f(t)\, e^{A(t)}$

VERIFICO

$y' \cdot e^{A(t)} + y\, e^{A(t)}\, a(t) = f(t)\, e^{A(t)}$ ✓

INTEGRO AMBO I MEMBRI

$$\int [y \cdot e^{A(t)}]'\, dt = \int f(t) \cdot e^{A(t)}\, dt + c$$

$$y \cdot e^{A(t)} = \int f(t)\, e^{A(t)}\, dt + c$$

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(\int f(t)\, e^{A(t)}\, dt + c \right)$$

SCELGO $c = 0$ $y_p(t) = e^{-A(t)} \int f(x)\, e^{A(t)}\, dt$

↳ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE

$$y(t) = c\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)\, e^{A(t)}\, dt$$

$$\overset{!}{=} e^{-A(t)} \left[c + \int f(t)\, e^{A(t)}\, dt \right]$$

ESERCIZIO PER CASA CON ULTIMO ARGOMENTO

$$\begin{cases} y' - \sin(t)\, y = \sin(t) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

APPLICARE SOLUZIONE GENERALE E CONDIZIONE INIZIALE