EDO LINEARI 1° ORDINE

$$y' + a(t)\, y = f(t) \qquad (*)$$

$t \to a(t),\ f(t)$ CONTINUA IN $I \subseteq \mathbb{R}$

$A(t)$ PRIMITIVA DI $a(t)$

LA SOLUZIONE $y(t)$ DI $(*)$

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

$y_0(t) = c \cdot e^{-A(t)}$ GENERALE OMOGENEA $(f=0)$

$y_p(t)$ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA COMPLETA

$$y_p(t) = e^{-A(t)} \int f(t)\, e^{A(t)}\, dt$$

$\begin{cases} y' + a\,y = f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ HA SEMPRE UNA SOL. UNICA IN UN CERTO INTERVALLO I CHE CONTIENE t_0

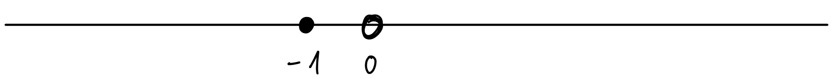
ESEMPI DI P.C. LINEARI

1) $\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}\, y + \dfrac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$

DETERMINARE INTERVALLO I ALL'INTERNO DEL QUALE SARÀ DEFINITA LA SOLUZIONE $\to$ DOMINIO DELLA SOL. È L'INTERVALLO MASSIMO CONTENENTE t_0 (CIOÈ -1)

$a(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \qquad f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$

a È CONTINUA IN TUTTO $\mathbb{R}$
f È CONTINUA " " " $\setminus \{0\}$



$$I = \,]-\infty, 0[$$

PASSO 1 CASO OMOGENEO

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \underbrace{\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx}_{=\ \ln(1+x^2)} = A(x)$$

$$y_0 = c \cdot e^{-A(x)} \overset{!}{=} c \cdot e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{c}{1+x^2} \quad \text{SOL. OMOGENEA}$$

PASSO 2 CASO PARTICOLARE

$$\int f(x) \cdot e^{A(x)}\, dx = \int \frac{1}{x\cancel{(1+x^2)}} \cdot \underbrace{e^{\ln(\cancel{1+x^2})}}_{\text{semplifico}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|)$$

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \cdot \int f(x) \cdot e^{A(x)}\, dx$$

$$y_p(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln|x| \longrightarrow \text{SOL. PARTICOLARE}$$

TOLGO MODULO IN BASE A I : $-$

$$y_p(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(-x)$$

SOL. GENERALE :

$$y(x) = \frac{c}{1+x^2} + \frac{\ln(-x)}{1+x^2}$$

COND. INIZIALE

$$y(-1) = 0$$

$$0 = \frac{c}{2} + 0 \implies c = 0$$

SOL. FINALE : $y(x) = \dfrac{\ln(-x)}{1+x^2} + 0$

ESEMPIO 2

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} + \sqrt{2-x} = 0 \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$$a(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = -\sqrt{2-x}$$

$$D: x \neq 0 \qquad D:]-\infty, 2]$$

$$I =]0, 2]$$

PASSO 1 OMOGENE

$A(x) = \ln|x|$ SCELGO + PER I : $\ln(x)$

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)} = c \cdot e^{-\ln x} = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$ SOL. OMOGENEA

PASSO 2

$$\int -\sqrt{2-x}\; e^{\ln(x)}\, dx = -\int x\sqrt{2-x}\, dx$$

SOSTITUZIONE DI VARIABILI

$2-x = u^2$ PER TOGLIERE RADICE $\to x = 2-u^2$ $\to u = (2-x)^{1/2}$

$dx = -2u\,du$ $\qquad u^3 = (2-x)^{3/2}$

$$\int x\sqrt{2-x} = \int \overset{x}{(2-u^2)}\,\overset{\sqrt{2-x}}{u}\,\overset{dx}{\overbrace{(-2u)\,du}}$$

$$= -\int (4u^2 - 2u^4)\, du$$

$$= -\left(\frac{4}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5\right)$$

$$= -\left(\frac{4}{3}(2x)^{3/2} - \frac{2}{5}(2x)^{5/2}\right)$$

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(\frac{4}{3}(2-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-x)^{5/2}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{4}{3}(2-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-x)^{5/2}\right)$$

SOL. GENERALE

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{4}{3}(2-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-x)^{5/2}\right) \qquad I =]0, 2]$$

$$4 = c + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right)$$

$$c = -4 + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{46}{15}$$

ESEMPIO 3

$$\begin{cases} y' + 2xy = x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$a(x) = 2x \qquad f(x) = x^3$

PASSO 1

$y_0(x) = c \cdot e^{-A(x)}$

$A(x) = x^2$ $\qquad y_0(x) = c \cdot e^{-x^2}$] SOL. OMOGENEA

PASSO 2

$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$ MAIN ROAD ?

UN POSSIBILE METODO ALTERNATIVO : • QUANDO IL COEFFICIENTE $a(x)$ É COSTANTE
• OPPURE QUANDO $a(x)$ É UN POLINOMIO E $f(x)$ É UN POLINOMIO

METODO SIMILARITÀ

$y_p(x)$ POTREBBE ESSERE POLINOMIO COME f (PROVO 3° GRADO COME f)

$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$y'_p(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ SE LA MIA IDEA É GIUSTA, LA VADO A VERIFICARE

$$\overbrace{3Ax^2 + 2Bx + C}^{y'} + \overbrace{2Ax^4 + 2Bx^3 + 2Cx^2 + 2Dx}^{y \cdot 2x} = x^3$$

UGUAGLIANZA TRA POLINOMI

$$\begin{cases} 2A = 0 \\ 2B = 1 \\ 3A + 2C = 0 \\ 2B + 2D = 0 \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1/2 \\ 0 = 0 \\ 1 + 2D = 0 \quad 2D = -1 \quad D = -1/2 \\ C = 0 \end{cases}$$

SE SISTEMA HA SOLUZIONE, HO TROVATO

$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$] SOL. PARTICOLARE

SOLUZIONE GENERALE

$y(0) = 1$

$1 = c \cdot e^{-x^2} + 1/2\, x^2 - 1/2$

$1 = c \cdot e^{0} + 1/2 \cdot 0 - 1/2$

$= c - 1/2 \to c = 3/2$

ESEMPIO 4

$$\begin{cases} y' - \sin t \, y = \sin t \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

$a(t) = -\sin(t)$ $\quad$ $f(t) = \sin(t)$

$D: \mathbb{R}$ $\quad$ $D: \mathbb{R}$

PASSO 1:

$A(x) = \cos(t)$

$y_0(t) = c \cdot e^{-\cos(t)}$

PASSO 2

$y_p(t) \to \int f(t) \cdot e^{At}$

$\int \sin(t) \cdot e^{\cos(t)} \, dt$

UNA SOL. PARTICOLARE È UNA FUNZ. COSTANTE?

SUPPONGO $y_p(t) = K$, $K \in \mathbb{R}$

$y_p'(t) = 0$ VERIFICO:

$0 - \sin(t) K = \sin(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

SCELGO $K = -1$; VERO $\forall t \in \mathbb{R}$

ALLORA: $y_p(x) = -1$

È UNA SOL. PARTICOLARE

SOL. GENERALE:

$$y(x) = c \cdot e^{-\cos(t)} - 1$$

$1 = c \cdot e - 1 \Rightarrow c = \frac{2}{e}$

EDO DIFF. LINEARI IN FORMA NORMALE DI SECONDO ORDINE

CASO OMOGENEO A COEFF. COSTANTI

$y'' + b y' + c y = 0 \qquad b, c \in \mathbb{R}$

INTEGRALE GENERALE DI QUESTA EQUAZIONE DA TROVARE

SUPPONIAMO 1° ORDINE:

$y' + a y = 0 \xrightarrow{\text{TRASFORMO EQ. DIFF. IN EQ. ALGEBRICA}} z + a = 0 \qquad z = -a$

$y(t) = e^{\lambda t}$

λ È LA SOL. DELL'EQ. ALG.

$y_0(t) = c \cdot e^{-A(t)} \qquad A(t) = \int a(t)\, dt$

$A(t) = \int a\, dt = a t$

COST.

$y_0(t) = c \cdot e^{-at}$

$= c \cdot e^{\lambda t} \qquad \lambda = -a$

TRASPORTO QUESTA IDEA IN 2° ORDINE

$y(t) = e^{\lambda t}$ DOVE λ È SOL. EQ. ALGEBRICA

EQ. ALG. CORRISPONDENTE

$z^2 + b z + c = 0$

SOL. $\lambda_1 \quad \lambda_2$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$