EDO LINEARI 2° ORDINE

CASO OMOGENEO A COEFF. COSTANTI

(1) $y'' + by' + cy = 0 \qquad b, c \in \mathbb{R}$

$S = \{ y(t) \in C^2(\mathbb{R}) \} \Rightarrow C^2(\mathbb{R})$

SPAZIO VETTORIALE $K = \mathbb{R}$
HA DIMENSIONE INFINITA

$\underset{\substack{\text{SOTTO SPAZIO}\\\text{VETT. DI } C^2(\mathbb{R})}}{H} = \{ y(t) \in C^2(\mathbb{R}) \ ; \ y(t) \text{ È LA SOL. DI } (1) \}$

↳ HA DIMENSIONE 2 → UNA BASE DI H

$B = \{ y_1(t), y_2(t) \} \qquad y_1$ E y_2 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

UNA ARBITRARIA SOLUZIONE DI (1) $y(t)$ SI SCRIVE COME COMB. LIN.

↳ $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$C_1, C_2 \in \overset{\text{N. COMPLESSI}}{\mathbb{C}}$

- L'IDEA DI COME TROVARE y_1, y_2 NASCE NEL CASO DEL 1° ORDINE:

↳ $y' + ay = 0 \Rightarrow y_1(t) = e^{-at}$

TORNO AL MIO CASO:

$y(t) = e^{\lambda t}$ PER QUALCHE $\lambda \in \mathbb{R}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

ALLORA: $\underbrace{e^{\lambda t}}_{\text{SEMPRE POS}} \underbrace{(\lambda^2 + b\lambda + c)}_{\text{PER FAR ZERO QUESTA PARTE DEVE ESSERE } = 0} = 0$

$\Delta = b^2 - 4c$

CASO 1) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

COME FACCIO A SAPERE SE LE DUE SOL. SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI?
DETERMINANTI

$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{u} = (u_1, u_2) \quad \bar{v} = (v_1, v_2) \qquad \text{DET}(A) = u_1 v_2 - u_2 \cdot v_1 \neq 0$
ALLORA $\bar{u}$ E $\bar{v}$ SON L.I.

MATRICE WRONSKIANA:

$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = W$

SE $\det(W) \neq 0$ ALLORA SON SOLUZIONI

$\det(W) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = W$$

$$\det(W) = e^{\lambda_1 t} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \lambda_2 - e^{\lambda_1 t} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \lambda_1$$

$$= \underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}_{\text{SEMPRE POS}} \cdot \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \neq 0$$

PER $\Delta > 0$

CASO 2) $\Delta < 0$

NO SOL. REALI : $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

LE SOL. LE CERCHIAMO IN CAMPO COMPLESSO

$\lambda_1 = \alpha - i\beta$ $\qquad \lambda_2 = \alpha + i\beta$ $\qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $\qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ $\qquad$ SONO L.I.

y_1, y_2 SONO SOL. "COMPLESSE" E NON REALI $\longrightarrow$ VOGLIO SOL. REALI

$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = z_1$ $\qquad z_2 = \frac{1}{2i}(y_2 - y_1)$

z_1, z_2 SONO L.I. E SONO 2 SOL.

$$y_1(t) = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \sin\beta t)$$

$$y_2(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= e^{\alpha t}\cos\beta t \in \mathbb{R} \\ z_2 &= e^{\alpha t}\sin\beta t \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{SOL. REALI}$$

CASO 3) $\Delta = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = y_2(t)$

COME TROVO $y_2(t)$ ANCORA SOLUZIONE IN (1) E TALE CHE $y_1(t)$, $y_2(t)$ SIANO L.I

• METODO DELLE VARIAZIONI DELLE COSTANTI:

$\hookrightarrow y_2(t) = t \cdot e^{\lambda_1 t} \longrightarrow$ SOL DI (1)

$$W = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

$$\text{DET}(w) = e^{\lambda_1 t}(1 + \cancel{\lambda_1 t} - \cancel{\lambda_1 t})$$
$$= e^{\lambda_1 t}$$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $\qquad$ $y_2(t) = t\,e^{\lambda_1 t}$ SONO L.I.

CASO <u>NON</u> OMOGENEO

(2) $\quad y'' + by' + cy = f(t)$

i) $f(t)$ È UN POLINOMIO DI GRADO m

ii) $f(t) = Ae^{\lambda t}$ ESPONENZIALE

iii) $f(t) = A\cos wt + B\sin wt$

TEOREMA!
LA SOL. GENERALE DI (2) $= y_0(t) + y_p(t)$
$y_0(t)$ SOL. GENERALE OMOGENEA
$y_p(t)$ UNA PARTICOLARE DI (2)

• METODO DELLA SIMILARITÀ
↳ IDEA: SUPPONGO CHE UNA SOL. PARTICOLARE $y_p(t)$ SIA DELLA FORMA DI $f(t)$

• L'IDEA FUNZIONA SEMPRE ECCETTO IN UN CASO PARTICOLARE
↓
i) $f(t)$ POLINOMIO DI GRADO m
↳ $y_p(t)$ POLINOMIO DI GRADO m

$$\begin{array}{lcccccccc} & y''(t) & + & b\,y'(t) & + & c\,y_p(t) & = & f(t) \\ & \| & & \| & & \| & & \| \\ \text{GRADI} & m-2 & & m-1 & & m & & m \end{array}$$

SE $c = 0$ $\quad y_p(t) = P_m(t) \cdot t$
POLINOMIO DI GRADO $m \cdot t$

ii) FUNZIONA SEMPRE ECCETTO QUANDO:

$f(t) = Ae^{\lambda t}$ $\qquad \lambda = \lambda_1 \lor \lambda = \lambda_2$

DOVE λ_1 λ_2 SONO LE RADICI DELL'EQ. CARATTERISTICA
SERVE UN AGGIUSTAMENTO!

$$y(t) = C_1 t e^{\lambda t}$$

iii) SERVE AGGIUSTAMENTO:

SE $f(t) = A\sin wt + B\cos wt$

QUANDO $w = \lambda_1 \lor w = \lambda_2$ $\qquad y_p(t) = t(A\sin wt + B\cos wt)$

ESEMPIO D'ESAME

$$\begin{cases} 3y'' - y = -2y' + 2e^{x/3} - x^2 \quad * \\ y(0) = 16 \\ y'(0) = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

P.C.

FORMA NORM.

$$3y'' + 2y' - y = 2e^{x/3} - x^2$$

$$f(x) = \underbrace{2e^{x/3}}_{ii)} - \underbrace{x^2}_{i)}$$

- SOVRAPPOSIZIONE SOLUZIONI PER LA LINEARITÀ DELL'EQUAZIONE

PRIMO PASSO: OMOGENEO

$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ $\qquad \lambda_1 = -1 \quad$ → COEFF DI 2 SOL $(-x^2)$ $\qquad \lambda = \frac{1}{3}$ → COEFF DI 1 SOL $(2e^{x/3})$

SOL. OMOGENEA: $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/3} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

SECONDO PASSO: PARTICOLARE

1) $y_{p_1}(x)$ PER $2e^{x/3}$

2) $y_{p_2}(x)$ PER $-x^2$

$$y_{p_{TOT}}(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

2 SOL $\qquad y_{p_2}(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$y'_{p_2}(x) = 2Ax + B \qquad y''_{p_2}(x) = 2A$$

SOSTITUISCO NELLA FORMULA * CONTANDO SOLO $-x^2$

$$6A + 4Ax + 2B - Ax^2 - Bx - C = -x^2$$

$$\begin{cases} -A = -1 \\ 4A - B = 0 \\ 6A + 2B - C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C = 14 \end{cases}$$

1 SOL

AGGIUNGO $\cdot x$ PER AGGIUSTARE

$$y_{p_1}(x) = \left(De^{x/3}\right) \cdot x$$

$$y'_{p_1}(x) = De^{x/3} + x\frac{1}{3}De^{x/3}$$

$$y''_{p_1}(x) = \frac{1}{3}De^{x/3} + \frac{1}{3}De^{x/3} + \frac{1}{9}xDe^{x/3}$$

SOSTITUISCO IN $\ast$

$$De^{x/3} + De^{x/3} + \frac{1}{3}xDe^{x/3} + 2De^{x/3} + \frac{2}{3}xDe^{x/3} - Dxe^{x/3} = 2e^{x/3}$$

DIVIDO TUTTO PER $e^{x/3}$

$$2D + \cancel{\frac{1}{3}xD} + 2D + \cancel{\frac{2}{3}xD} - \cancel{xD} = 2$$

$$4D = 2$$

$$D = \frac{1}{2}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE FINALE $\left(\underbrace{[1 \text{ SOL} + 2 \text{ SOL}]}\right. + \left.\text{OMOGENEA}\right)$

$$y_p(x) = x^2 + 4x + 14 + \frac{1}{2}xe^{x/3}$$

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x/3} + x^2 + 4x + 14 + \frac{1}{2}xe^{x/3}$$

DERIVO PER USARE ENTRAMBE LE COND. INIZIALI

$$y'(x) = -C_1e^{-x} + \frac{1}{3}C_2e^{x/3} + 2x + 4 + \frac{1}{2}e^{x/3} + \frac{1}{6}xe^{x/3}$$

$y(0) = 10 \quad \Rightarrow C_1 + C_2 + 14 = 10 \ \ldots$

$y'(0) = -\frac{17}{2} \quad \Rightarrow -C_1 + \frac{1}{3}C_2 + 4 + \frac{1}{2} = -\frac{17}{2} \ \ldots$