CURVE PARAMETRICHE

FUNZIONI REALI

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• GENERALIZZAZIONI POSSIBILI

1° TIPO: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad n \geq 1$

2° TIPO: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $\quad m \geq 1$

FUNZIONI VETTORIALI

DEF. $\bar{v} : I \to \mathbb{R}^m \quad m > 1 \quad \underset{\text{INTERVALLO}}{I \subseteq \mathbb{R}}$

$t \in I \to \bar{v}(t) = (x_1(t), x_2(t) \dots x_m(t))$

$t \to x_i(t) \quad i = 1, \dots, m$

m FUNZIONI SCALARI

$m = 2 \quad \bar{v}(t) = (x(t), y(t)) \qquad m = 3 \quad \bar{v}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

↳ • TRAIETTORIA DI UN PUNTO CHE SI MUOVE NEL PIANO

$\bar{x} \in \mathbb{R}^m \quad \bar{x} = (x_1 \dots x_m)$

$$\underbrace{\|\bar{x}\|}_{\text{NORMA EUCLIDEA DI } \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \dots x_m^2}$$ LUNGHEZZA DEL VETTORE $\bar{x}$

$m = 2 \to$ TH. PITAGORA

DISTANZA TRA $\bar{u}, \bar{v}$ IN $\mathbb{R}^m$

$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\|$

• LIMITE: $\quad \bar{l} = (l_1, l_2 \dots l_m)$

$\lim_{t \to t_0} \bar{v}(t) = \bar{l} \in \mathbb{R}^m$ SIGNIFICA CHE $\|\bar{v}(t) - \bar{l}\| \xrightarrow[\text{TENDE A ZERO}]{t \to t_0} 0$

$$\sqrt{(x_1(t) - l_1)^2 + (x_2(t) - l_2)^2 \dots, (x_m(t) - l_m)^2}$$

$$\lim_{t \to t_0} \bar{v}(t) = \bar{l} \iff \lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i \qquad \forall_i = 1, \dots, m$$

ESEMPIO $m = 3$

$\bar{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad x(t) = \sin t \qquad y(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \qquad z(t) = e^t$

$t_0 = 0 \qquad \lim_{t \to 0} \bar{v}(t) = ?$

$\bar{v}(t) \xrightarrow{t \to 0} (0, 1, 1) = \bar{l}$

- DEFINIZIONE CONTINUITÀ

$\bar{v} : I \to \mathbb{R}^m$ $\quad \bar{v}$ È CONTINUA SSE LO SONO TUTTE LE COMPONENTI DI $\mathbb{R}$

$t \to x_i(t)$ CONTINUA $\forall_i = 1, \dots, m$

- DEFINIZIONE DERIVATA

$\bar{v}$ È DERIVABILE QUANDO LO SONO TUTTE LE SUE COMPONENTI

$\bar{v}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t) \dots x_m'(t))$

ARCO DI CURVA – VETTORE TANGENTE

$\bar{v} : I \to \mathbb{R}^m$

SE $\bar{v}$ È CONTINUA $\to$ $\bar{v}$ É ARCO DI CURVA (CAMMINO)

$\bar{v}(I) = \gamma =$ SOSTEGNO DELLA CURVA

↳ TUTTI I PUNTI DEL DOM.

INSIEME DI TUTTE LE POSIZIONI OCCUPATE DAL MIO PUNTO MOBILE

$\gamma \subseteq \mathbb{R}^m$

- SOSTEGNO $\to$ VISIONE STATICA
- FUNZIONE VETTORIALE $\bar{v}(t)$ $\to$ VISIONE DINAMICA

- SE $\bar{v}$ È DERIVABILE, COSA RAPPRESENTA $\bar{v}'(t)$? $\Rightarrow$ VETTORE TANGENTE OSSIA (FISICAMENTE) VETTORE VELOCITÁ DEL PUNTO MOBILE

- LA VELOCITÁ SCALARE È LA LUNGHEZZA DEL VETTORE VELOCITÁ / TANGENTE

$\| \bar{v}(t) \|$ NORMA DI $\bar{v}'(t)$

SE $\| \bar{v}'(t) \| > 0$ $\Rightarrow$ LA DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITÁ $\bar{v}'(t)$ È LUNGO LA RETTA TANGENTE ALLA CURVA $\bar{v}(t)$ IN t

$\bar{v}''(t) \to$ ACCELERAZIONE

CURVA PARAMETRICA

$\bar{v} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ CONTINUA.

- LA CURVA È DESCRITTA DAL "PARAMETRO" t

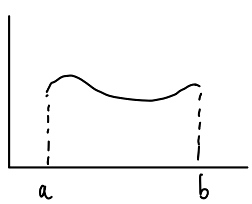
- ALTRI MODI DI RAPPRESENTARE UNA CURVA

1) $f : I \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$I = [a, b]$

GRAFICO DI f:

↳ CURVA NEL PIANO



$\{ (x, f(x)) : x \in [a, b] \}$

CURVA DATA IN FORMA ESPLICITA

$\bar{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ $\quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$ $\quad t \in I = [a, b]$

$y = f(x)$

ESPLICITA → PARAMETRICA

PARAMETRICA $\not\to$ ESPLICITA (NON SEMPRE)

ESEMPIO 1)

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} x(t) = t + \ln(t^2 + t + 1) \\ y(t) = t^4 + t^3 + 1 \end{cases} \qquad t \in [0,1] = I$$

$y = f(x)$ → CHI È LA f? → IMPOSSIBILE!!!

DOVREI ELIMINARE IL PARAMETRO t → QUI NON È POSSIBILE

---

2) FORMA IMPLICITA

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

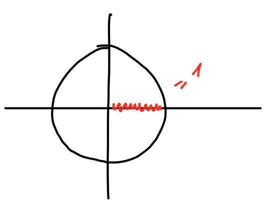
CURVA IN FORMA IMPLICITA

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

ESEMPIO

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ → CIRCONFERENZA CON ORIGINE $(0,0) = \bar{0}$ E RAGGIO 1

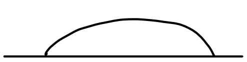


EQ. CIRCONF.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

QUESTA CURVA NON È RAPPRESENTABILE IN FORMA ESPLICITA NELLA FORMA $y = f(x)$

DOVREI SCEGLIERE



PARTE SOPRA LE X

$y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$

PARTE SOTTO LE X

ESEMPIO DI CURVA PARAMETRICA NEL PIANO $(m = 2)$

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = 2t - 1 \end{cases} \qquad I = \mathbb{R}$$

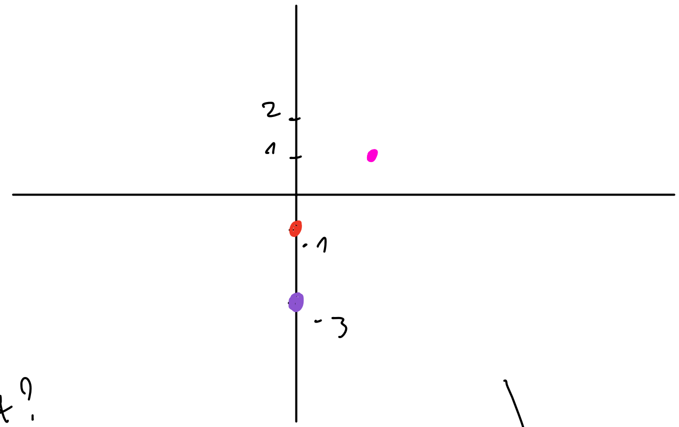
MASSIMO OBIETTIVO: DISEGNARE | RAPPRESENTARE SUL PIANO IL SOSTEGNO (γ) DELLA CURVA $\rightarrow$ DISEGNARE LA CURVA NEL PIANO

$t = -1, 0, 1$

$\bar{v}(-1) = (x(-1), y(-1)) = (0, -3)$

$\bar{v}(0) = (x(0), y(0)) = (0, -1)$

$\bar{v}(1) = (x(1), y(1)) = (2, 1)$



È POSSIBILE PASSARE ALLA FORMA ESPLICITA? OSSIA ELIMINARE IL PARAMETRO t?

$y = f(x)$ OPPURE $x = f(y)$

IDEA: ISOLARE t SU UNO DEI DUE E SOSTITUIRE!

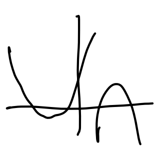
$t = \frac{1+y}{2}$ DALLA 2^a EQ. | 2^a COMPONENTE DELLA CURVA

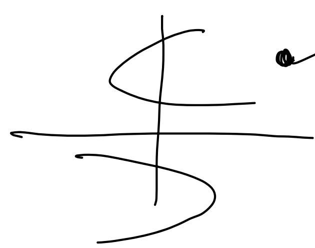
LA IMMETTO NELLA 1^a COMPONENTE

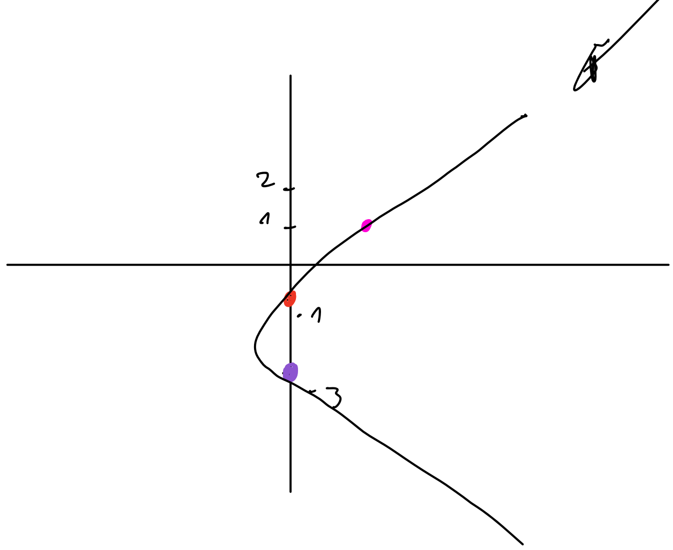
$$x = \left(\frac{1+y}{2}\right)^2 + \frac{1+y}{2}$$

$\hookrightarrow \underbrace{\frac{1}{4}y^2 + y + \frac{3}{4}}_{\text{PARABOLA}} \rightarrow$ DEL TIPO $x = \underbrace{f(y)}$

ATTENZIONE: $y = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $x = ay^2 + by + c$






2
1
1
3