CURVE PARAMETRICHE

- VISIONE STATICA CURVA γ → SUPPORTO DI γ $\bar{v}(I)$
- VISIONE DINAMICA CURVA γ → RAPPRESENTAZIONE ATTRAVERSO $\bar{v}(t)$

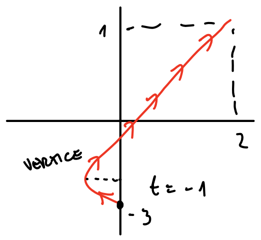
ESEMPIO 1

$$\bar{v}(t): \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = 2t - 1 \end{cases}$$

$t \in I = [1, -1]$

PASSATO → FUTURO ⇒ SCELGO $t_1 = -1$, $t_2 = 1$
t_1 t_2

ALLORA VERSO PERCORRENZA DA BASSO A ALTO



$t = 1 \Rightarrow (2, 1)$

$t = -1 \Rightarrow (0, -3)$

EQ.: $x = \frac{1}{4} y^2 + y + \frac{3}{4}$ DEL TIPO $x = f(y)$

ESEMPIO 2

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + \frac{3}{4} \\ y(t) = -2t \end{cases} \qquad t \in I = \mathbb{R}$$

DA PARAM. A ESPLICITA:

$$x = \frac{1}{4} y^2 + y + \frac{3}{4}$$ → STESSA FORMA ESPLICITA DEL 1° ES.

NELL'ES. 1: $\bar{v}_1(0) = (0, -1)$
NELL'ES. 2: $v_2(0) = (\frac{3}{4}, 0)$
} DIVERSE POS. NEGLI STESSI ISTANTI

VELOCITÀ DIVERSE! TROVIAMO VETT. VELOCITÀ:

$\bar{v}_1'(t) = (2t + 1, 2)$ $\quad \|v_1'(0)\|^2 = (1^2 + 2^2) = 5$

$\bar{v}_2'(t) = (2t - 2, -2)$ $\quad \|v_2'(0)\|^2 = (-2^2 + -2^2) = 8$

} VELOCITÀ DIVERSE

ES. 3

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t & 1) \\ y(t) = 2 \sin t & 2) \end{cases} \qquad t \in I = [0, 2\pi]$$

ELIMINARE t:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) $\cos t = \frac{x}{5}$ $\quad \cos^2 t = \frac{x^2}{25}$

2) $\sin t = y/5$ $\quad \sin^2 t = \frac{y^2}{4}$

CURVA FORMA IMPLICITA

$$\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x^2}{25}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

ELLISSE CON CENTRO (x_0, y_0)

SEMIASSI a (ASSE x)

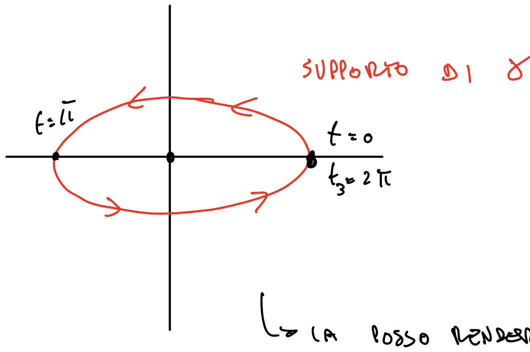
b (ASSE y)

$a, b > 0$

- IL CENTRO : ORIGINE

SEMIASSE : $a = 5$

$b = 2$



$t_1 = 0 \Rightarrow (5, 0)$

$t_2 = \pi \Rightarrow (-5, 0)$

$t_3 = 2\pi \Rightarrow (5, 0)$

↳ LA POSSO RENDERE NON SEMPLICE E NON È CHIUSA:

CON $I = [0, 3\pi]$

• DEF. CURVA CHIUSA

$\bar{v} : [a, b] = I \to \mathbb{R}^m$ CONTINUA

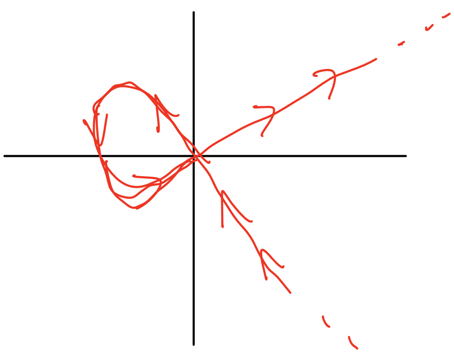
LA CURVA γ RAPPRESENTATA DA F È CHIUSA SE $\bar{v}(a) = \bar{v}(b)$

ESEMPIO FOLIUM DI CARTESIO

$$\begin{cases} x(t) = t(t-1) \\ y(t) = t(t-1)(2t-1) \end{cases}$$

$t \in I = \mathbb{R}$

POTREBBE ANCHE PER $t \in I = [0, \frac{1}{2}]$



DEF. CURVA SEMPLICE

$\bar{v} : [a, b] = I \to \mathbb{R}^m$

LA CURVA γ È SEMPLICE SE $\forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow \bar{v}(t_1) \neq \bar{v}(t_2)$

ECCETTO AL PIÙ $t_1 = a$ E $t_2 = b$

CURVA REGOLARE:

SE RIESCO A DEFINIRE VETTORE VELOCITÀ

DEF. $\bar{v} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^m$ CONTINUA

CURVA γ SI DICE REGOLARE SE LA $\underbrace{\bar{v}(t) \text{ È } C^1 \text{ SU } I}_{①}$ E : $\underbrace{\bar{v}'(t) \neq \bar{0} \ \forall t \in I}_{②}$

$\| \bar{v}(t) \| \neq \bar{0} \quad \forall t \in I$ ②

$$\bar{v}(t) : \begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in I = [0, 2\pi] \qquad \gamma$$

È REGOLARE?

$\bar{v}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-5\sin t, 2\cos t)$

SONO CONTINUE ✓

ALLORA C^1 ✓

$\bar{v}'(t) \neq \bar{0} \quad \forall t \in I$? SÌ ✓

ALLORA È $\boxed{\text{REGOLARE}}$

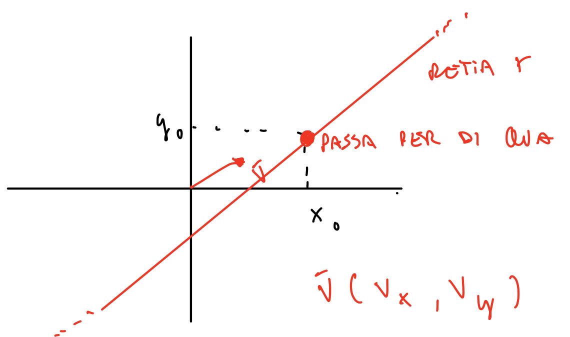
DIM.

$$\begin{cases} -5\sin t = 0 \\ 2\cos t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin t = 0 \\ \cos t = 0 \end{cases} \qquad I = [0, 2\pi] \quad \text{MAI!}$$

• COME CALCOLARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA γ IN UN SUO PUNTO?

$y = f(x)$ $\qquad y = \overset{\to \text{ COEFF. ANGOLARE}}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

EQ. RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO (x_0, y_0)



RETTA r PASSA PER (x_0, y_0) E HA DIREZIONE $\bar{v}$

EQ. PARAMETRICA

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

TROVARE EQ. CARTESIANA

EQ. CARTESIANA

$\rightarrow t = \frac{x - x_0}{V_x}$ $\qquad y = y_0 + V_y \left(\frac{x - x_0}{V_x} \right) \Rightarrow y = y_0 + \frac{V_y}{V_x} (x - x_0)$

SUPPOSTO CHE $V_x \neq 0$

SE $V_x = 0 \rightarrow r$ É VERTICALE $\rightarrow$ EQ. PARAM SARÁ ANCHE CARTESIANA

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$$

$t_0 \in I$ SUPPONGO CHE $\bar{v}'(t_0) \neq 0$

$x_0 = x(t_0) \quad y_0 = y(t_0)$

$$\bar{v}'(t) = \begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} V_x = x'(t_0) \\ V_y = y'(t_0) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\gamma \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

EQ. RETTA TANG A γ IN $t_0 = 1$
$t_0 = 0$

SIA IN FORMA PARAMETRICA CHE CARTESIANA

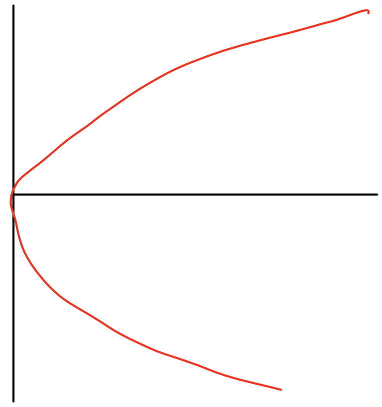
$$\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 1 \end{cases} \qquad \overset{t_0 = 1}{\begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}} \qquad \begin{cases} x'(1) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

$x(t) = 1 + 2(t - 1) = 1 + 2t - 2 = 2t - 1$
$y(t) = 1 + (t - 1) = t$

$y = 2x - 1 \Rightarrow$ CARTESIANA

$t_0 = 0$

$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$



$x(t) = 0$ $x = 0 \to$ È L'ASSE y

USANDO METODO SOSTITUENDO t : $x = y^2 \to x = f(y)$

ESEMPIO

$\bar{v}(t)$ γ $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \end{cases}$ $t \in I = [-2, 2]$

• CHIUSA?

$\begin{cases} x(-2) = 8 \\ y(-2) = 1 \end{cases}$ $\bar{v}(a) = (8, 1)$

$\begin{cases} x(2) = 24 \\ y(2) = -1 \end{cases}$ $\bar{v}(b) = (24, -1)$

NO CHIUSA

• SEMPLICE?

└ SE SÍ, $\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2)$ NON DEVE SUCCEDERE PER $t_1, t_2 \in [-2, 2]$

$t_1 < t_2$

DIMOSTRO CHE NON È SEMPLICE

└ $y(t_2) = y(t_1)$ $t_1\ t_2 \in [-2, 2]$ $t_1 < t_2$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} t_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t_1\right)$

1) $\frac{\pi}{2} t_2 = \frac{\pi}{2} t_1 + 2k\pi$ $k = 0, 1, 2, \dots$

2) $\frac{\pi}{2} t_2 + \frac{\pi}{2} t_1 = 2\pi + 2k\pi$ $k = 0, 1, 2 \dots$

SE FOSSE SIN :

1) $\alpha_2 = \alpha_1 \dots$

2) - - - - -

PRIMO CASO:

$I = [-2, 2]$

$l = 4$

1) $t_2 = t_1 + 4k$

$t_2 - t_1 > 4$ PER $k \geq 1$

$k = 0$ $t_2 = t_1$ NON PUÒ MAI SUCCEDERE

2) $t_2 + t_1 = 2 + 4k$ $k > 1$ ESCO DA DOM.

UNICA POSSIBILITÀ È $k = 0$ $\boxed{t_2 = 2 - t_1}$