CURVE PARAM.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \qquad t \in I = [-2, 2]$$

- NON È CHIUSA! VEDI CURVE PARAM. 2

- SEMPLICITÀ: METODO 1

NON È SEMPLICE SE ACCADE:

$\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2) \qquad t_1 < t_2$

ECCETTO $t_1 = a$ E $t_2 = b$ $\to$ ESTREMI I CASO 1) IMPOSSIBILE

SEC. CASO

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}t_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t_1\right)$

$\frac{\pi}{2}t_2 + \frac{\pi}{2}t_1 = 2\pi + 2k\pi$

MOLT. PER 2 E DIVIDO PER π

$t_1 + t_2 = 4 + 4k$ $\qquad t_1 + t_2$ MAX $= 4$ PER $L(I)$

$k \geq 1$ IMPOSSIBILE PER DOM.

$k = 0$ $t_1 + t$ $\to$ ENTRAMBI $= 2$ $\to$ NO PERCHÉ $t_1 < t_2$ PER DOM.

ALLORA È SEMPLICE.

METODO 2

$y(t_1) = y(t_2) \qquad y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$t \to \cos(kt) \to T = \frac{2\pi}{k}$ VERO IN GENERALE

$k = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} \cdot 2 = 4 \to$ È SEMPLICE

- REGOLARITÀ

$$\bar{v}'(t) = \begin{cases} x'(t) = 3t^2 + 4t^3 \\ y'(t) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$

VETT. TANG.

$t \to x'(t), y'(t)$ SONO CONTINUE SU I (PRIMA COND.)

$\bar{v}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

SE IMPOSSIBILE $\to$ REGOLARE

SE NON PENSO SIA REGOLARE INVECE:

$x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ $\to$ SE SI VERIFICA NON È REGOLARE

$t_0 = 0 \rightarrow$ SI ANNULLANO ENTRAMBE LE DERIVATE $\rightarrow$ NO REGOLARE

- CALCOLARE IL VERSORE TANGENTE ALLA CURVA γ IN UN PUNTO $t_0 = -1$

VERSORE = VETTORE DI LUNGHEZZA 1

$$\bar{v}'(t) = \begin{cases} x'(t) = 3t^2 + 4t^3 \\ y'(t) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$$

$$x'(-1) = -1$$
$$y'(-1) = \pi/2$$

$$\bar{v}'(-1) = (-1, \pi/2)$$

$$\|\bar{v}'(-1)\| = \sqrt{-1^2 + \frac{\pi^2}{4}} = \sqrt{1 + \pi^2/4}$$

VERSORE TANG.

$$V_1(t) = \frac{v'(t)}{\|v'(t)\|} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\pi^2/4}}, \frac{\pi/2}{\sqrt{1+\pi^2/4}} \right)$$

ESEMPIO

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos(|\pi t|) \\ y(t) = \sin(|\pi t|) \end{cases} \qquad t \in I = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

- CHIUSA?

$$v\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} x(-3/2) = 0 \\ y(-3/2) = -1 \end{cases}$$

SE UGUALI, CHIUSA

$$v\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} x(3/2) = 0 \\ y(3/2) = -1 \end{cases}$$

SÍ È CHIUSA

SEMPLICE? NON LO È SE $t_1 < t_2$ $v(t_1) = v(t_2)$

QUALSIASI $t_1 < t_2$ NON È SEMPLICE:

NON POSSO PRENDERE ESTREMI DI I

REGOLARITÀ

1) $x'(t)$ E $y'(t)$ DEVONO ESSERE CONTINUE IN $I = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$$y(t) = \begin{cases} -\sin(\pi t), & t \in [-3/2, 0[\\ \sin(\pi t) & t \in]0, 3/2] \end{cases}$$

$t < 0 : \; y(t) = \sin(-\pi t) = -\sin(\pi t)$

$$y'(t) = \begin{cases} -\pi \cos(\pi t) & , t \in [-3/2, 0] \\ +\pi \cos(\pi t) & , t \in]0, 3/2] \end{cases}$$

$y'(t) \xrightarrow{t \to 0^-} -\pi$

$y'(t) \xrightarrow{t \to 0^+} +\pi$

$\nexists \, y'(0)$ NON È REGOLARE

• DISEGNARE SUPPORTO DI γ

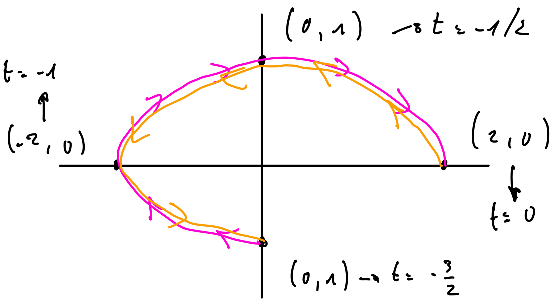
FORMA ESPLICITA / IMPLICITA

↳ USO TRUCCO

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \cos(|\pi t|) \\ y = \sin(|\pi t|) \end{cases} \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

ELLISSE CENTRO $(0,0)$

SEMIASSI 2 E 1



$t = -\frac{3}{2}$

$t = -1$

$t = -1/2$

$t = 0^-$

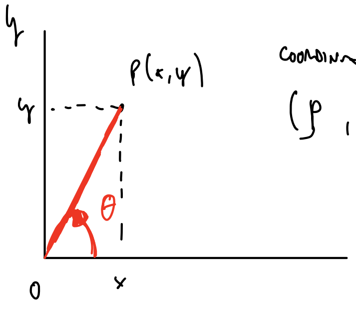
$t = 0^+$

$t = 1$

$t = 3/2$

ESEMPIO

CURVE IN COORDINATE POLARI



COORDINATE POLARI

(ρ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{se } x \neq 0$$

$x = 0 \quad y > 0 \quad \theta = \pi/2$

$x = 0 \quad y < 0 \quad \theta = 3/2\,\pi$

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in I = [a, b]$$

$$\rho : [a, b] \to [0, +\infty[$$

IL SIGNIFICATO DI ρ È UNA DISTANZA

- LA CURVA γ RAPPRESENTA LA DESCRIZIONE DI UN MOTO PUNTO A DISTANZA VARIABILE $\rho(\theta)$ DALL'ORIGINE E SEMPRE CON VERSO ANTIORARIO

$\sqrt{x^2(\theta) + y^2(\theta)}$ DISTANZA DEL PUNTO DALL'ORIGINE

IN θ $= \rho(\theta)$

IPOTESI

→ SUPPONIAMO ρ SIA DI CLASSE $C^1(I)$

$$\gamma'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = \rho'(\theta) \cdot \cos(\theta) + \rho(\theta)(-\sin(\theta)) \\ y'(\theta) = \rho'(\theta) \cdot \sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = (\rho')^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta + \rho'^2 \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta$$

$$= (\rho')^2 + \rho^2$$

$$\gamma'(\theta) = \bar{0} \quad \text{SSE} \iff \begin{cases} \rho'(\theta) = 0 \\ \rho(\theta) = 0 \end{cases}$$

REGOLARITÀ

- SEMPLICITÀ:

γ NON È SEMPL. SE $\theta_1 < \theta_2$

$\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x(\theta_1) = x(\theta_2) \\ y(\theta_1) = y(\theta_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho(\theta_1)\cos\theta_1 = \rho(\theta_2)\cos\theta_2 \\ \rho(\theta_2)\sin\theta_1 = \rho(\theta_2)\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2(\theta_1)\cos^2(\theta_1) = \rho^2(\theta_2)\cos^2(\theta_2) \\ \rho^2(\theta_1)\sin^2(\theta_1) = \rho^2(\theta_2)\sin^2(\theta_2) \end{cases}$$

$$\rho^2(\theta_1)(\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) = \rho^2(\theta_2)(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2))$$

PERCHÉ NON SIA SEMPLICE

1) $\rho(\theta_1) = \rho(\theta_2)$

COND.

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \end{cases} \rightarrow \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$$

2) CONDIZIONI

PERCHÉ NON SIA SEMPLICE: 1) E 2) ENTRAMBE

ESEMPIO TEORIA $A > 0 \in \mathbb{R}$ $\quad \theta = [0, +\infty[$

1) $\begin{cases} x(\theta) = A\theta\cos\theta \\ y(\theta) = A\theta\sin\theta \end{cases}$

$\rho(\theta) = A\theta \qquad \rho : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$

SEMPLICE?

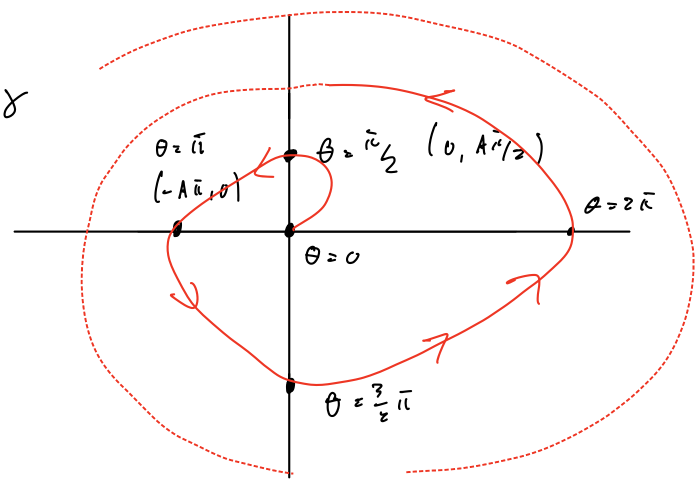
$\rho'(\theta) = A \qquad \rho$ È INIETTIVA $\rightarrow$ STRETT. CRESCENTE

$\Rightarrow$ LA CURVA È SEMPLICE

$\rho \in C^\infty(I)$

$\rho(\theta) + \rho'(\theta)$ SEMPRE SEMPRE POS. | REGOLARE $\qquad \rho$ CRESCENTE $\rightarrow$ DIST. DA ORIGINE CRESCENTE

DISEGNARE SUPPORTO γ



SPIRALE DI ARCHIMEDE

× RASA

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{\theta} \cos(\theta) \\ y(\theta) = \frac{1}{\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$

$\rho(\theta) = \frac{1}{\theta}$ $\rho : [\pi, +\infty[\to]0, +\infty[$