ESERCIZIO 1

• INTEGRALI

- $\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ CON $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

  CON f, g FUNZIONI OPPURE COSTANTI
- $\int f(x)\,dx \Rightarrow u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$

  $\Rightarrow$ ISOLO dx E SOSTITUISCO SIA $f(x)$ CHE dx

  $\Rightarrow$ NELL'INTEGRALE DOVRÀ RIMANERE SOLO LA VAR. 'U'
- $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ CON $\alpha \neq -1$, $\alpha = -1$
- $\int \dfrac{1}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

- $\int f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|$

$\Rightarrow$ SSE $f(x) = g'(x)$

$\Rightarrow$ POSSO AGGIUSTARE MOLT./DIVIDENDO IN MODO DA AVERE LA DERIVATA CORRETTA

ESEMPIO: $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - \alpha$

$\frac{1}{2}\int x \cdot \dfrac{1}{x^2-\alpha}$ COSÍ $\frac{1}{2} \cdot g'(x) = x$

• CONDIZIONE INIZIALE

- HO $\overset{C.I.}{y(x_0) = \alpha}$, $\overset{SOL.\ COST.}{y = \beta}$

↳ SE $\alpha = \beta$:

↳ SOL. NON COST. VALIDA: SALTA UNICITÀ (TROVO DOMINIO DI ENTRAMBE)

↳ SOL. NON COST. NON VALIDA: UNICITÀ ✓ (DOMINIO SOLO SU COSTANTE)

↳ SE $\alpha \neq \beta$

↳ SOL. NON COST. VALIDA: UNICITÀ ✓ (DOMINIO SOLO SU NON COST.)

↳ SOL. NON COST. NON VALIDA: $\nexists$ SOLUZIONE: NO DOMINIO

• NOTE:

↳ RICORDA CHE $y(x_0) = \alpha$: x_0 DEVE RISPETTARE LE CONDIZIONI DATE DA ME INIZIALMENTE, SE NON LE RISPETTA SALTA TUTTO

↳ DOPO AVER APPLICATO C.I.: TROVARE DOMINIO DI ESISTENZA PIÙ GRANDE CHE COMPRENDA x_0 (CON $y(x_0) = \alpha$) E CHE RISPETTI LE CONDIZIONI DATE DA ME

• EDO 2° ORDINE

1 - ISOLARE y'', y' E y

2 - RISOLVERE EQ. DI SECONDO GRADO CON I COEFF.

(ES. $3y'' + 2y' - y \Rightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$)

3 - SE HA 2 SOL. DISTINTE:

↳ $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$

SE HA 2 SOL. COINCIDENTI:

↳ $(C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}$

SOLUZIONE OMOGENEA

4 - SOL. PARTICOLARE: GUARDO PARTE DESTRA E CAPISCO DI CHE FORMA È

ESEMPI:

NOTA: SE LA SOL PARTIC. È UGUALE A QUELLA OMOGENEA, MOLTIPLICO PER x (ANCHE PIÙ VOLTE SE NECESSARIO)

4.1 - ESPONENZIALE:

$\pm k e^{\pm \alpha x} \Rightarrow A e^{\pm \alpha x}$

4.2 - GONIOMETRICA:

$\cos|\sin(\alpha x) \Rightarrow M\cos(\alpha x) + N\sin(\alpha x)$

$x^2\cos(\alpha x) \Rightarrow (Ax^2 + Bx + C)\cos(\alpha x) + \dots$

$\dots + (Dx^2 + Ex + F)\sin(\alpha x)$

$\cos(-2x) \Rightarrow M\cos(2x)\dots$

$\sin(-2x) \Rightarrow M\cos(2x) + N\sin(2x)$

NOTA: COEFFICIENTI SEMPRE POSITIVI (E ARGOMENTI ANCHE PER 4.2)

4.3 - POLINOMI

$f(x) = \pm\alpha \Rightarrow y_p = A$

$f(x) = \pm x \pm \alpha \Rightarrow Ax + B$

$f(x) = \pm x^2 \pm x \pm \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow Ax^2 + Bx + C$

5 - HO IL MIO y_p DELLA FORMA CORRETTA, LO DERIVO 2 VOLTE TROVANDO y' E y''.

6 - SOSTITUISCO TUTTO NELLA EDO INIZIALE EGUAGLIANDO LA PARTE DESTRA

7 - RACCOLGO TERMINI SIMILI ED EGUAGLIO: SE NON C'È A DX, MOTO = 0.

$t^2(A+2A\dots) = \alpha t^2\dots$

8 - METTO A SISTEMA E TROVO SOL. DI $A, B\dots$ E LE SOSTITUISCO IN y_p E TROVO SOL PART.

9 - METTO ASSIEME SOL OMOGENEA CON QUELLA PARTICOLARE PER OTTENERE QUELLA FINALE

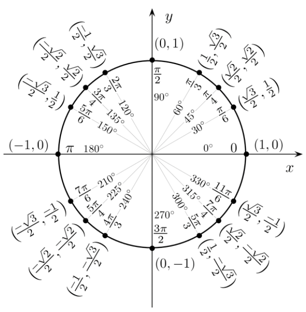
10 - CON QUELLA FINALE APPLICO CONDIZIONI INIZ.

ES. $y(x_0) = \alpha$ $y'(x_0) = \alpha$

E SOST. IN $y_{h+p}(x)$ OPPURE IN $y'_{h+p}(x)$ E TROVO I VALORI DI C_1 E C_2 (PUÒ ESSERE DI TROVARE C_1 NELLA PRIMA E POI RISOLVENDO TROVARE C_2 NELLA 2ª)

ESERCIZIO 2

• GONIOMETRIA



- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ CON $\cos \neq 0$
- RICORDA DI FARE IL GIRO AL CONTRARIO QUANDO C'È $-\pi, -\pi/2 \dots$ (ESEMPIO: $-\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$)
- SE TROVO UN ANGOLO $\theta > 2\pi$, (SIA PER SIN CHE PER COS) ALLORA SOTTRAGGO 2π FINCHÉ NON TROVO UN ANGOLO NOTEVOLE (SE $\theta < 2\pi$, AGGIUNGO 2π)

• SEMPLICITÀ, CHIUSURA, REGOLARITÀ, CONTINUITÀ

↳ CURVA CHIUSA: APPLICO I DUE ESTREMI DEL DOMINIO E SE SONO UGUALI, ALLORA È CHIUSA

↳ CURVA SEMPLICE: SE $R(t_1) \neq R(t_2)$ PER OGNI $t_1 \neq t_2 \in I$ → DOPO AVER DISEGNATO LA CURVA SI PUÒ VEDERE → NON SI DEVE MAI INTRECCIARE (TRANNE ESTREMI DI CHIUSURA)

↳ CONTINUITÀ FUNZIONE A TRATTI

↳ VERIFICARE CHE NEL PUNTO CRITICO I VALORI SIANO UGUALI

ES.

$\begin{cases} t^2 & \text{SE } t \in [0,1] \\ t & \text{SE } t \in]1,2] \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1^2 = 1 \\ 1 = 1 \end{matrix}$ □

• VERSORE (TANGENTE)

$R(t) = (x(t), y(t))$

$R'(t) = (x'(t), y'(t)) = A$

$\|R'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = B$

$V = \dfrac{A}{B} = \left(\dfrac{x'(t)}{B}, \dfrac{y'(t)}{B}\right)$

SE DOVESSI CALCOLARLO IN UN PUNTO, ALLORA LO INSERISCO APPENA HO FATTO LA DERIVATA

• EQUAZIONE PARAMETRICA E CARTESIANA DELLA RETTA TANGENTE A γ IN $t_0 = c$ CON $c \in \mathbb{R}$ (SE DEF. A TRATTI, SCELGO L'INTERVALLO CHE COMPRENDE t_0)

1 - CALCOLO PUNTO DI TANGENZA

$P = [x(t_0), y(t_0)]$

2 - TROVO IL GRADIENTE E APPLICO IL PUNTO

$\gamma'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0)]$

3 - LA RETTA TANGENTE (EQ. PARAMETRICA):

$\begin{cases} x(s) = x(t_0) + s\,x'(t_0) \\ y(s) = y(t_0) + s\,y'(t_0) \end{cases}$

4 - EQUAZIONE CARTESIANA (SE POSSIBILE)

$s = \dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)}$ CON $x'(t_0) \neq 0$

$y = y(t_0) + \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$

• FORMA POLARE

- IL COEFFICIENTE DAVANTI È IL RAGGIO ρ
- LA FORMA DEVE ESSERE NELL'ORDINE COSENO → SENO CON LO STESSO ARGOMENTO

$R(t) = \rho(t)\,(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$

• NOTA: SE HO UN QUADRATO $(a \pm b)^2$ DI BINOMIO, NON LO DEVO SVOLGERE MA SOLO SOSTITUIRE LE t. IN CASO PER FARE LA DERIVATA LO SVOLGO

↳ REGOLARITÀ: DERIVO LA CURVA, E CONTROLLO CHE SIA $\gamma' \neq (0,0)\ \forall t \in I$

SE NON SONO SICURO, TROVO VELOCITÀ: (O VEDO FIGURA SE HO PUNTI ANGOLOSI)

$R'(t) = (x'(t), y'(t)) \Rightarrow V(t) = \| R(t) \| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

NOTA CHE PER SEMPLICITÀ POSSO SOSTITUIRE $c = \cos \pi t$, $s = \sin \pi t$, $a = \pi t$ ....

- SE HO IL MODULO, CONVIENE SPEZZARE

ESERCIZIO 3

- **CASISTICHE HESSIANA:**

DET (H)	f_{xx}	RISULTATO
> 0	> 0	MIN LOCALE
> 0	< 0	MAX LOCALE
< 0	QUALSIASI	SELLA
$= 0$	QUALSIASI	INCONCLUDENTE

- **VERSORE DI MASSIMA CRESCITA**

(SE t_0 P.TO STAZIONARIO $\Rightarrow$ VERSORE NON DEFINITO)

$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ IN $t_0 = (x_0, y_0)$

$\| \nabla f \| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$

$v = \left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right]$ (MAX DISCESA: MOLT. PER -1 AMBO LE COMPONENTI DI V)

- **PIANO TANGENTE** IN $t_0 = (x_0, y_0)$

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \ldots$
$\ldots + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

- $z = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$ **(DISEGNO DEL GRAFICO)**

POSSO RACCOGLIERE, IN MODO DA AVERE PIÚ SOLUZIONI (POSSO AVERE RETTE + PARABOLE + ELLISSI ....)

- **MOSTRARE CHE MIN/MAX LOCALI SONO GLOBALI**

- NOTA: PER MOSTRARE CHE NON LO SONO, PROVO A FAR VEDERE (FISSANDO $x \vee y$ AD UNA COSTANTE) CHE $\lim_{x \vee y \to \pm\infty} f = \pm\infty$

- USARE PARABOLA: HO UN PUNTO DI MIN/MAX P_0

$f(P_0) = \alpha$, CONSIDERO PROBLEMA DI MIN:

$f(x, y) \geq \alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x, y) - \alpha \geq 0$

FISSO $x = x_0$ P.TO FISSO (SOST.) (ANCHE CON y_0 SE SERVE)

$g(y) = x_0 + \ldots$

PORTO IL POLINOMIO NELLA FORMA:

$g(y) = Ay^2 + By + C$ (CONSIDERO x_0 COME COSTANTE)

VERTICE $y_V = -\frac{B}{2A}$

SOSTITUISCO IN $g(y_V)$ E TROVO FUNZIONE IN x_0:

SE $g(x_0) \geq 0\ \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ È GLOBALE

- **SE HESSIANA DÁ TEST INCONCLUDENTE:**

- $P = (x_0, y_0)$, CALCOLO $f(x_0, y_0)$.
- $g(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$
- SOSTITUISCO LE x CON $x_0 + h$, LE y CON $y_0 + k$
- INFINE, CERCO DI TROVARE PIÚ SEZIONI IN CUI IL SEGNO CAMBIA PER h, k PICCOLI (ES. SU UNA SEZIONE $\gtreqless 0$ E UN ALTRA < 0). ESEMPIO SEZIONI: $h = 0$, $k = 0$, $h = k$, $h = h^2$, $h = h^3$, $h = ak$, $h = ak^2$....

- **IMMAGINE**

USARE $x = 0$, $y = 0$ ... PER VEDERE COME SI COMPORTA ASINTOTICAMENTE PER TROVARE IMMAGINE

- **FORMULA DETERMINANTE**

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot d - b \cdot c$

NOTE VARIE

- $\dfrac{A}{B/C} = \dfrac{A \cdot C}{B}$

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

- $a^b = c \iff \log_a(c) = b$
$e^b = c \iff \ln(c) = b$
$\alpha \ln(b) = \ln(b^\alpha)$
$\frac{1}{2} \ln|b| = \ln\sqrt{|b|}$
$\ln|a| = \ln|b| + c = e^{\ln|a|} = e^{\ln|b| + c} = \frac{e^{\ln|b|} \cdot e^c}{} \Rightarrow$
$\Rightarrow |a| = |b| \cdot e^c$

- $f(x)^2 = g(x) \Rightarrow f(x) = \pm\sqrt{g(x)}$
↳ $g(x) \geq 0$

$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x)^2 = g(x)$
↳ $g(x) \geq 0$ TENER CONTO PER LE SOLUZIONI

$f(x)^3 = g(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$

- $\sqrt[2]{x} = x^{1/2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = (x^{1/2})^{-1} = x^{-1/2} \Rightarrow$
IN GENERALE: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

ELLISSE

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

CENTRO = (h, k) SEMIASSI: a ORIZZONTALE, b VERTICALE

- **MODULO**

$|A(y)| = B(x)$

- SE $B(x) \geq 0\ \forall x$, ALLORA SCRIVO DIRETTAMENTE $A(y) = \pm B(x)$
- SE $B(x) < 0$ PER QUALCHE x, ALLORA DOVE $B(x) < 0$ NON C'É SOLUZIONE, DOVE $B(x) \geq 0$ C'É SOLUZIONE

CIRCONFERENZA

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

COEFF. x^2 = COEFF. y^2 E ENTRAMBI > 0

NON POSSO AVERE xy

PORTO NELLA FORMA:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

DOVE: $x_0 = -a/2$, $y_0 = -b/2$

$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c} \Rightarrow$ ARGOMENTO > 0

- **DERIVATE**

- $\sqrt{f(x)} = f'(x) \left[\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \right]$
- $\cos(f(x)) = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
- $\sin(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
- $[f(x)]^m = m [f(x)]^{m-1} \cdot f'(x)$
- $\ln(f(x)) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
- $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

ESEMPIO:

$\alpha \frac{1}{x} \Rightarrow \alpha \cdot x^{-1}$
↳ $\alpha[-1(x)^{-1-1}]$
↳ $\alpha(-\frac{1}{x^2})$