FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad n \geq 2$

$n = 2 \quad n = 3$

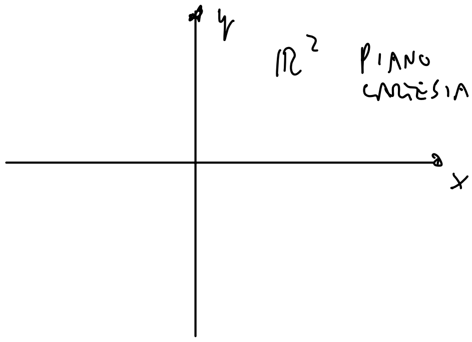
- $n = 2$ INPUT: $(x, y) \to \boxed{f} \xrightarrow{\text{OUTPUT}}$ N° REALE $= z$

↳ $z = f(x, y)$ CON x, y COPPIA DI VARIABILI INDIPENDENTI

z = VARIABILE DIPENDENTE OUTPUT

- $n = 3$ $\quad w = f(x, y, z)$

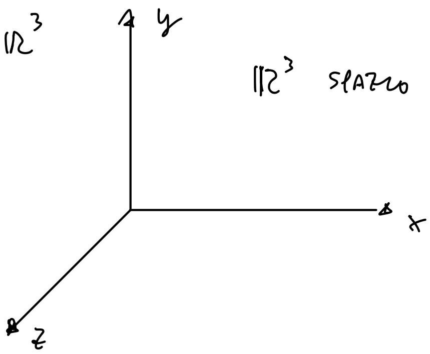
TORNIAMO A $n = 2 \to D$ = DOMINIO DI $f \subseteq \mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^2$ PIANO CARTESIANO

$n = 3$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ SPAZIO



$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$P_0 = (x_0, y_0) \qquad P_1 = (x_1, y_1)$

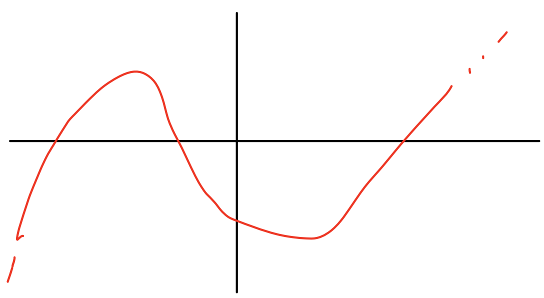
$d(P_0, P_1)$ = DISTANZA TRA P_0 E P_1

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = \|P_0 - P_1\|$$

GRAFICO DI f

$n = 1 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{GRAFICO}_f = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

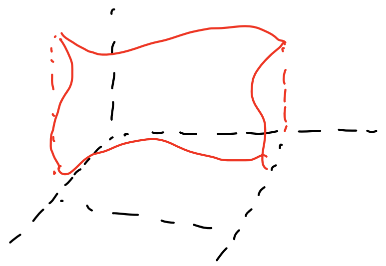


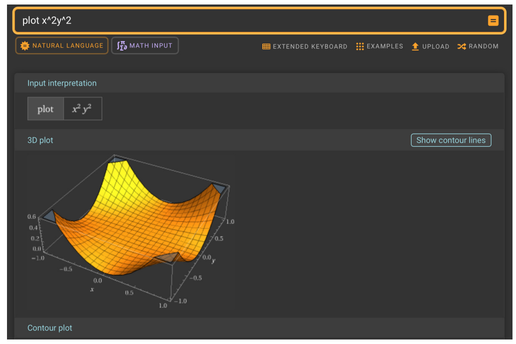
IL GRAFICO_f È UNA CURVA CHE SI TROVA NEL PIANO

$n = 2 \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$GRAFICO_f = \{ (x, y, z) : (x, y) \in D \ , \ z = f(x, y) \}$$

IL GRAFICO È UNA SUPERFICIE NELLO SPAZIO CARTESIANO

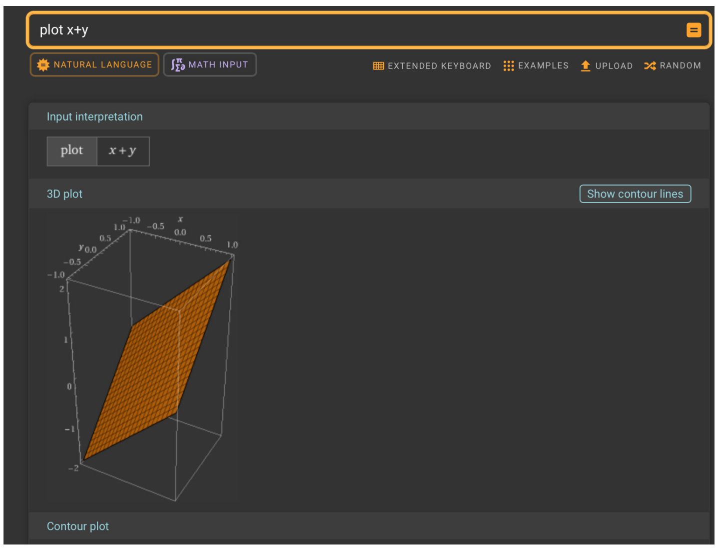




$f(x, y) = x^2 \cdot y^2$

LINEARE :

$f(x) = x + y$



PIANO NON VERTICALE

$z = ax + by + c = f(x, y)$

$\Rightarrow a = 1 \ , \ b = 1 \ , \ c = 0$

OPPURE CON $a = 0$ E $b = 0$:

$\Rightarrow a = 0 \ , \ b = 0 \ , \ c = 3$

- CURVE DI LIVELLO

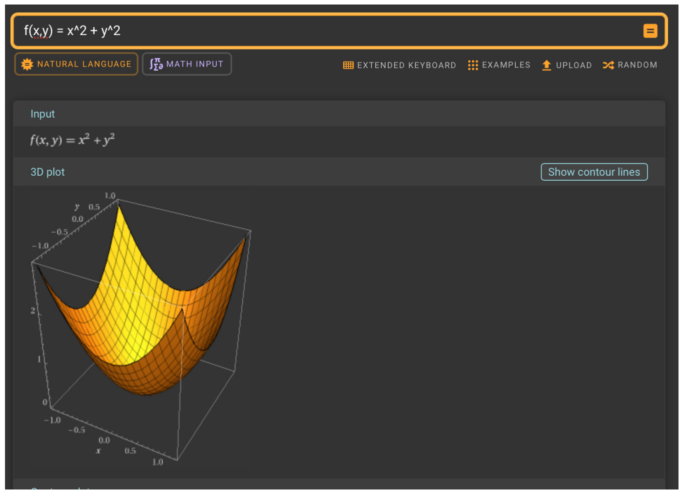
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad z = f(x,y)$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ SUPERFICIE PARABOLOIDE ELLITTICO

↓

COME PARABOLA IN $\mathbb{R}^1$



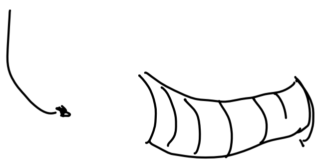
$\sqrt{x^2+y^2}$ CONO

L_c = CIRCONF.

LE LINEE DI LIVELLO SI RICAVANO INTERSECANDO LA FUNZ. CON UN PIANO ORIZZ.

$\sqrt{x^2 - y^2}$ CONO INFINITO

$x^2 - y^2 \to$ SELLA / PRINGLES

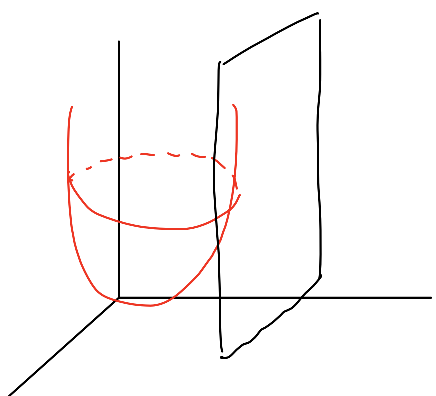


- SEZIONI VERTICALI

$z = f(x,y)$ SE FISSIAMO UNA DELLE DUE VARIABILI

ESEMPIO $y = y_0 \vee x = x_0$

ALLORA DIVENTA UNA CURVA DI UNA FUNZIONE A 1 INCOGNITA



- STUDIO FUNZIONE A PIÙ VARIABILI

$f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad n = 2, \ n = 3$

VOI AVETE UNA LEGGE ~~ESPLICITA~~

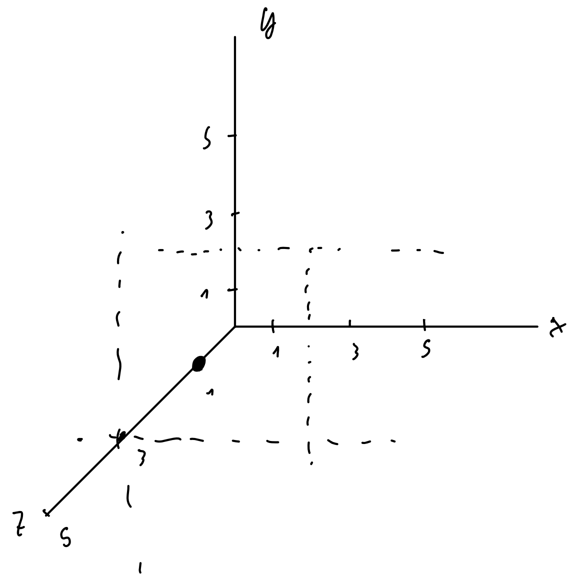
$(x,y) \to \boxed{f} \to z \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - y + 1$

$(0,0) = 1$

$(1,1) = 1$

$(2,2) = 3$



- DOMINIO NATURALE: IL PIÙ ESTESO SOTTODOMINIO POSSIBILE DI $\mathbb{R}^2$ (DI $\mathbb{R}^3$) SU CUI LA VOSTRA FUNZ. ABBIA SENSO

ES.
$$f(x,y) = \frac{2x^2}{1 - xy}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - xy \neq 0\}$$

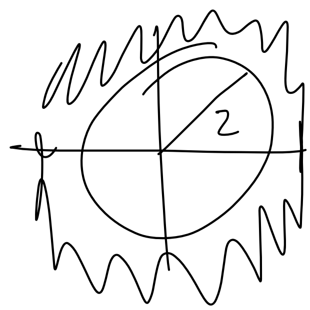
$1 - xy \neq 0 \to xy \neq 1$

ESEMPIO $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$D: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \}$

$x^2 + y^2 \leq 4 \to$

FUORI DAL CERCHIO NON C'È NULLA



ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{\ln(x-y)}{x+2y}$$

$$D: \begin{cases} x - y > 0 \\ x + 2y \neq 0 \end{cases}$$

LA SOL. DEL SISTEMA CI DÀ DOM. NAT.

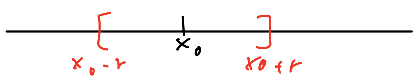
- NATURA TOPOLOGICA DEL DOMINIO

↳ TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^2$

CONCETTO DI INTORNO DI UN PUNTO

$I_r = [x_0 - r, x_0 + r]$

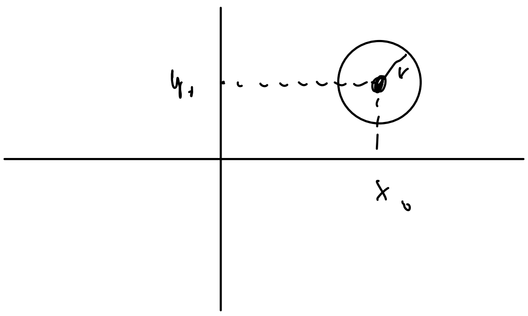
$n = 1 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$



|

L'INTORNO È UN INTERVALLO / SEGMENTO CON CENTRO x_0 E RAGGIO r (DOVE r POSITIVO PICCOLO QUANTO VOGLIAMO)
È L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI CHE DISTANO DA x_0 AL MASSIMO r

$n = 2$ $\quad P_0 = (x_0, y_0)$ $\quad r > 0$ PICCOLO QUANTO VOGLIAMO



$U_r(P_0)$ = INSIEME DEI PUNTI DEL PIANO CHE DISTANO DA P_0 AL MASSIMO r

SONO $d((x,y),(x_0,y_0)) \leq r$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq r \longrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2$$

PUNTI INTERNI E SULLA CIRCONF. DELLA CIRCONF. DI CENTRO (x_0, y_0) E RAGGIO r

IN $\mathbb{R}^3$ SARÀ INVECE IL RAGGIO DELLA SFERA

- CLASSIFICAZIONE TOPOLOGICA PUNTI DI UN QUALUNQUE SOTTOINSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^2$

↳ $A \subseteq \mathbb{R}^2$
$P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

1) P_0 INTERNO AD A SSE $P_0 \in A \wedge \exists r > 0 : U_r(P_0) \subset A$

2) P_0 ESTERNO AD A SSE $P_0 \notin A \wedge \exists r > 0 : U_r(P_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus A$
COMPLEMENTARE DI A

3) P_0 PUNTO DI FRONTIERA PER A SE $\forall r > 0 : U_r(P_0) \cap A \neq \emptyset \wedge U_r(P_0) \cap \mathbb{R}^2 \setminus A \neq \emptyset$

ESEMPIO