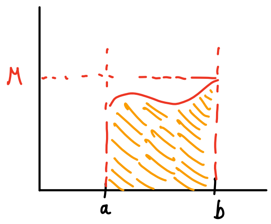
INTEGRALI GENERALIZZATI
(IMPROPRI)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$



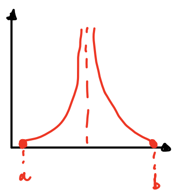
INTEGRALE DI RIEMANN (DEFINITO)

$\int_a^b f(x)\,dx$ = AREA DEL TRAPEZOIDE

C. NECESS. PERCHÉ L'INTEGRALE DI f ESISTA È CHE LA f SIA LIMITATA

$\exists M > 0 : |f(x)| \le M \quad \forall x \in [a, b]$

CONTROESEMPIO GRAFICO



$\nexists \int_a^b f(x)\,dx$ ⇒ NON ESISTE INTEGRALE CLASSICO

---

1) SE LA f (FUNZIONE INTEGRANDA) È CONTINUA $\xRightarrow{\text{ALLORA}}$ f È INTEGRABILE (RIEMANN)

2) SE È CONTINUA, ALLORA VALE IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

F SI DICE PRIMITIVA DI f SE

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

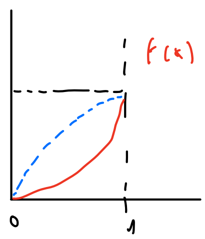
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

DOVE F È UNA QUALUNQUE PRIMITIVA DI f

• ESEMPIO : $f(x) = x^2$

$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ PRIMITIVA DI $f(x) = x^2$ $\quad F'(x) = x^2$



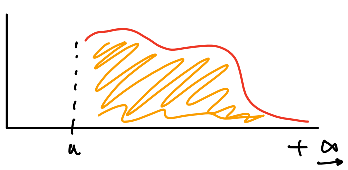
$f(x) = x^2$ CON $x \in [0, 1]$

COSA SI PROPONE DI FARE L'INTEGRALE GENERALIZZATO?

1) RIUSCIRE A CALCOLARE L'INTEGRALE DI f SU UN DOMINIO ILLIMITATO

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ → ORA $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$

HA SENSO CALCOLARSI L'AREA SOTTESA DALLA f QUI?

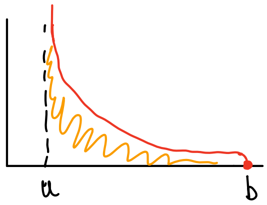


$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = ?$

"TRAPEZOIDE NON FINITO"

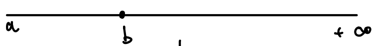
2) RIUSCIRE A CALCOLARE L'INTEGRALE DI f NON LIMITATA IN $[a, b]$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

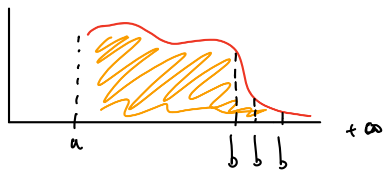


1 - RISPOSTA

$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$



$\forall b > a \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$



$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{DEF.}}{=} I = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a)$

SE ESISTE QUESTO LIMITE

- Ⓐ $\lim_{b \to +\infty} F(b) = l \in \mathbb{R}$ (INTEGRALE CONVERGE $I = l - \mathbb{R}$
- Ⓑ $\lim_{b \to +\infty} F(b) = \pm\infty$ (AREA INFINITA, INTEGRALE DIVERGENTE)
- Ⓒ $\lim_{b \to +\infty} F(b) = \nexists$ (INDETERMINATO)

ESEMPIO: TROVARE INTEGRALE

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$ QUANTO VALE?

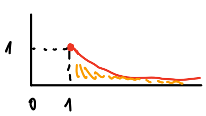
2 FASI:

1) TROVARE PRIMITIVA F DI f
2) CALCOLARE (SE ESISTE)
$\lim_{b \to +\infty} F(b)$

SE IL LIMITE ESISTE FINITO, ALLORA $I = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a)$

ESEMPIO:

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$

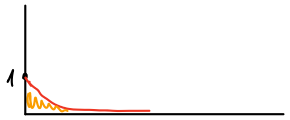


$F(x) = \ln(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow$ DIVERGE

ESEMPIO:

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) = e^{-x}}$



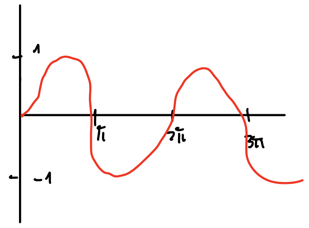
$$F(x) = -e^{-x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$$

$$I = \lim_{x \to +\infty} -e^{-x} - F(0) = 0 - (-1) = +1$$

ESEMPIO

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx$$



$f(x) = \sin(x)$

$$F(x) = -\cos(x) \qquad F'(x) = \sin(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \cos(x) = \nexists$$

GENERALIZZIAMO L'ESEMPIO $\frac{1}{x}$

$$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R} \qquad a > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \qquad p > 0$$

$f(x) = \frac{1}{x^p}$

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) & p = 1 \\ \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} & p \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \begin{cases} +\infty & \text{con } -p+1 > 0 \implies \text{DIVERGE} \\ 0 & \text{con } -p+1 < 0 \implies \text{CONVERGE} \end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} = 0 - F(a) = 0 - \frac{a^{1-p}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{p-1} \quad \text{con } p > 1$$

INVECE DIVERGE CON $0 < p \leq 1$