ESEMPIO:

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx}_{I}$$

SE I ESISTE CALCOLARLO

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1) TROVARE $F(x) \to F'(x) = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(|f(x)|) + c \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} f(x) = 1+x^2 \\ f'(x) = 2x \end{matrix}$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = F$$

2) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{2}\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$

DIVERGENTE: $I = +\infty$

• PER CASA

↳ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ ↳ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx$

ESEMPIO NON STANDARD

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+7x^3+x^2+1}}\, dx$$

SE I ESISTE FINITO TROVARLO

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+7x^3+x^2+1}}$$

1° PASSO $F(x)$ TROVARE PRIMITIVA DI f

TROVARE LA FORMA ESPLICITA DI UNA PRIMITIVA F QUI È IMPOSSIBILE.

↳ IN QUESTO CASO NON POSSO CHIEDERE QUANTO VALE I!

MI ACCONTENTO DI DIMOSTRARE O MENO SE f SIA CONVERGENTE (O MENO)

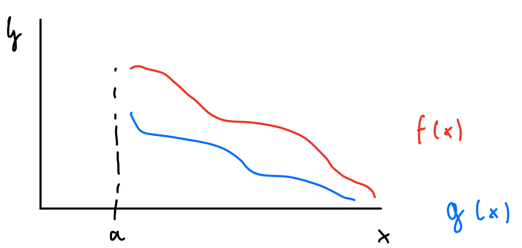
• METODO DEL CONFRONTO (CLASSICO)

IPOTESI DI BASE: STUDIEREMO PER QUESTO METODO SOLO FUNZIONI POSITIVE $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$

SOTTO QUESTA IPOTESI SI PUÒ DIMOSTRARE CHE AVETE SOLO I CASI CONVERGENTE DIVERGENTE

INTUIZIONE:

$f, g: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad \begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}$ $\quad \forall x \in [a, +\infty[$



$f(x) \geq g(x)$
$\forall x \geq a$

• SE g DIVERGENTE, ALLORA f DIVERGE

$\Downarrow$

SE $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx = +\infty$ ALLORA $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$

• SE f È CONVERGENTE $\Rightarrow$ g È CONVERGENTE

• LA CLASSE "PRIVILEGIATA" DI FUNZIONI g CON CUI FARE IL CONFRONTO È $g(x) = \frac{1}{x^p}$ $\quad p > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 7x^3 + x^2 + 1}}$$

IP. BASE : $f(x) > 0$ OK

$D_f = [2, +\infty[$

$$x^4 + 7x^3 + x^2 + 1 > x^4 \qquad \forall x \geq 2$$

$$\sqrt{x^4 + 7x^3 + x^2 + 1} > \sqrt{x^4} = x^2$$

ROVESCIO NUM. DENOM.

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 + 7x^3 + x^2 + 1}} < \frac{1}{x^2}$$

$\longrightarrow$ $4 > 2$: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

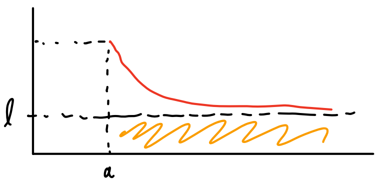
$$f(x) < g(x)$$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad p = 2$ $\longrightarrow$ CONVERGENTE ALLORA $f(x)$ È CONVERGENTE

SUPPONIAMO DI STUDIARE FUNZIONI POSITIVE CHE ABBIANO LIMITE FINITO PER $x \to +\infty$
(IPOTESI DI BASE PIÙ LARGA)

$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad , \quad l \in \mathbb{R}$

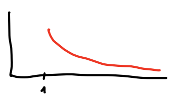


AREA RETTANGOLO

• h FINITA E b INFINITA $\longrightarrow$ $b \times h$ = INFINITA

NECESSARIAMENTE $l = 0$ SE VOGLIO CHE LA f SIA CONVERGENTE. $l = 0$ È SOLO UNA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE

$f(x) = \frac{1}{x}$ DIVERGENTE



L'UNICA POSSIBILITÀ PERCHÉ f SIA CONVERGENTE È CHE LA f TENDA A ZERO "MOLTO VELOCEMENTE"

---

1 CRITERIO DI CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq a$

$\qquad g(x) \geq 0$

f, g SONO INFINITESIMI

LA f TENDE A ZERO $(x \to +\infty)$ CON LA VELOCITÀ IDENTICA A QUELLA DELLA g $\longrightarrow$ $f = O(g)$

f È CONVERGENTE / DIVERGENTE $\Longleftrightarrow$ g È CONVERGENTE / DIVERGENTE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \qquad l > 0$$

ESEMPIO

$$D = [5, +\infty[$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 - x}}\, dx \qquad f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 - x}}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 5 \quad \text{OK}$$

VERIFICARE SEMPRE CHE LA NOSTRA f SIA UN INFINITESIMO PER $x \to +\infty$

RACC. FATTORI + GRANDI

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^6\left(1 - \frac{1}{x^5}\right)}} = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\sqrt{1 - \frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}^{1}}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{x^5}}}_{1}} \quad \text{PER } x \to +\infty$$

f VA A ZERO CON LA STESSA VELOCITÀ DI $g(x) = \frac{1}{x}$

ALLORA $\frac{1}{x^p}$ CON $p = 1$ DIVERGE

PER IL 1° CRITERIO ASINTOTICO ANCHE f È DIVERGENTE

PER CASA: $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^4 - x}}\, dx$

2 ESEMPIO

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 \ln(x)} \qquad f(x) \geq 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

LA VADO A CONFRONTARE CON $g(x) = \frac{1}{x^p}$ PER QUALCHE $p > 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2 \ln(x)}}{1/x^p} = \frac{x^p}{x^2 \ln(x)} = \frac{x^{p-2}}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p-2}}{\ln(x)}$$

CASO 1 : $p = 2 \to \frac{1}{\ln(x)} \to 0$ NO

CASO 2 : $p < 2 \to \frac{1}{x^{2-p}\ln(x)} \to 0$ NO

CASO 3 : $p > 2 \to \frac{x^{p-2}}{\ln(x)} \to +\infty$ NO

NON POSSO APPLICARE 1° CRITERIO DEL CONFRONTO

2° CRITERIO ASINTOTICO

SUPPONIAMO CHE f VADA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE DI g

$$f = o(g)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

SE g È CONVERGENTE $\Rightarrow$ f È CONVERGENTE

SE f È DIVERGENTE $\Rightarrow$ g È DIVERGENTE

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x} \qquad g = \frac{1}{x^p}$$

PRIMA HO SCOPERTO CHE f VA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE DELLA g PER $0 < p \leq 2$

$p = 2$ CONVERG. g CONV. $\Rightarrow$ f CONVERG.

PER CASA: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3 \ln x + x}$ È CONVER.?

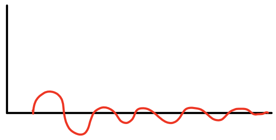
COSA SUCCEDE SE LA f CAMBIA CONTINUAMENTE SEGNO SUL DOMINIO?
SE LA f NON È "DEFINITIVAMENTE" POSITIVA?

- I CRITERI VISTI IN PRECEDENZA IN QUESTO CASO QUI NON SI APPLICANO

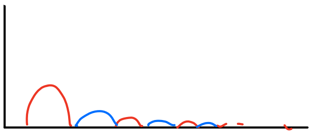
INVECE DI STUDIARE f STUDIO $|f(x)|$ → SEMPRE POSITIVA
→ QUI POSSO USARE I CRITERI

$\displaystyle\int_a^{+\infty} |f| \, dx < +\infty$ f È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

SE f È ASS. CONV $\Rightarrow$ f È CONVERGENTE



STUDIO INVECE IL
MODULO



ESEMPIO

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} \, dx$ $\quad f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$

CAMBIA CONTINUAMENTE SEGNO

$|f(x)| = \dfrac{|\cos(x)|}{x^2}$ $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2} \, dx$

CONTINUA PROX LEZIONE