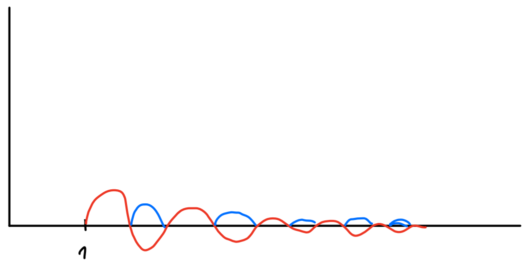
ESEMPIO

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \qquad f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$$

TENDE A 0 PER $x \to +\infty$

CAMBIA CONTINUAMENTE SEGNO



$$|f(x)| = \frac{|\cos(x)|}{x^2} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2}\,dx$$

STUDIO ASSOLUTA CONVERGENZA

$\to$ SOLO IL MODULO DI f : LA PARTE DI AREA NEGATIVA LA SOMMO COME SE FOSSE POSITIVA

SE f È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE (CIOÈ $|f|$ CONVERGE) ALLORA ANCHE SENZA MODULO

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{|x^2|}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2}\,dx$$

SE PENSO CHE CONVERGA

$$|f(x)| = \frac{|\cos(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} = g(x)$$

$\ge$

SE PENSO CHE DIVERGA

$g(x) = \frac{1}{x^p}$ CON $p = 2 \Rightarrow$ CONVERGE $\Rightarrow |f|$ CONVERGE $\Rightarrow f$ CONVERGE

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \in \mathbb{R} \quad \text{CONVERGE}$$

ESEMPIO SENZA MODULO

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

CAMBIA SEGNO CONTINUAMENTE

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{PER PARTI}}{=} \frac{-\cos(x)}{x} + \int -\frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

$(\sin x) \cdot \frac{1}{x}$

INTEGRO DERIVO

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Bigg|_{2\pi}^{+\infty} - \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{-\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x}}_{0} + \frac{\cos(2\pi)}{2\pi} - \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$0 + \frac{1}{2\pi} - \underbrace{\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx}_{\to \text{ CONVERGE}}$$

RISULTATO : CONVERGENTE

METODO CON ASSOLUTO

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x} \qquad D = [2\pi, +\infty[$$

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$ È CONVERGENTE? NO, È DIVERGENTE

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = +\infty$$ DIMOSTRAZIONE

$$\frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{\sin^2(x)}{x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$ IDENTITÀ VERA $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{x}$$

$$\underbrace{\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx}_{\text{SE QUESTO CONV.}} + \underbrace{\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx}_{\text{QUESTO CONVERGE}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx}_{\text{DIVERGE } (p=1)}$$

↓

HO CONTRADDIZIONE, DOVREBBE DIVERGERE

ESERCIZI

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1+\cos^2(x)}{\sqrt{x}\cdot(2-\sin^2 x)}$$

$$1+\cos^2(x) \geq 1$$

$$2-\sin^2(x) \leq 2 \longrightarrow \frac{1}{2-\sin^2(x)} \geq \frac{1}{2}$$

$$f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = \frac{1}{x^p} \qquad p = \frac{1}{2}$$ DIVERGE ALLORA $f(x)$ DIVERGE

ES.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \qquad f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} > 0 \quad \forall x \geq 2$$

$$f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

ENTRAMBI I CRITERI ASINTOTICI FALLISCONO E IL CONFRONTO CLASSICO È INUTILIZZABILE

TROVO PRIMITIVA!

$$F(x) = \ln(|\ln(x)|)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(|\ln(x)|) = +\infty$$

PER CASA

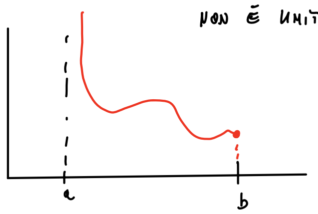
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x - e^{-x}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x)^3}\,dx$$

2° TIPO DI INTEGRALE GENERALIZZATO (ASINTOTO VERTICALE ANZICHÉ ORIZZONTALE)

CASO STANDARD $f : \left]a, b\right] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

NON È LIMITATA → NO RIEMANN



DETTA $F(x)$ UNA PRIMITIVA DI f DIRÒ CHE
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{x \to a^+} F(x) = l \in \mathbb{R}$$

CONVERGENTE $\Longleftrightarrow$ IL LIMITE È FINITO

SOLO 2 CASI: DIVERGENTE CONVERGENTE

1) PROCEDURA A 2 PASSI: PRIMITIVA E LIMITE $x \to a^+$ $F(x)$

2) METODO DEL CONFRONTO (CLASSICO)

$f(x) \le g(x)$ g CONVERGE $\Rightarrow$ f CONVERGE
f DIVERGE $\Rightarrow$ g DIVERGE

IN $\left]a, b\right]$ → "VICINO AD a" IN UN INTORNO DI a

3) CONFRONTO ASINTOTICO

1. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ $l > 0$

f, g ENTRAMBE CONV. O DIV.

2. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ SE g CONVERGE f CONVERGE
SE f DIVERGE g DIVERGE !!!

$g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ $p > 0$ $\Rightarrow$ FUNZIONE PRINCIPE
CONVERGE PER $0 < p < 1$
DIVERGE PER $p \ge 1$

$\int$

$$G(x) = \frac{1}{1-p} \cdot (x-a)^{1-p} \qquad G'(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$$

$$\lim_{x \to a^+} G(x) = 0 \longrightarrow 0 < p < 1$$

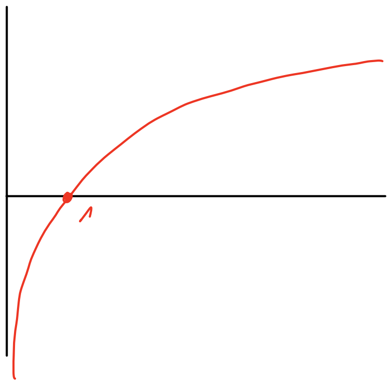
$$\lim_{x \to a^+} G(x) = +\infty \longrightarrow p > 1$$

$$p = 1 \quad G(x) = \ln(x-a) \xrightarrow{x \to a^+} -\infty$$

ESEMPIO

1) $\int_0^1 f(x)\,dx$ è conv.? $\quad f(x) = \ln(x)$

$D: = \,]0, +\infty[$



INTEGRALE IMPROPRIO DEL SECONDO TIPO

$$F(x) = x \ln x - x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x \ln(x)}_{= 0} - \underbrace{x}_{= 0}$$

x VA PIÙ FAST DI $\ln(x)$

ESEMPIO

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ è conv.?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D: \left\{ x \in \mathbb{R} \quad 1-x^2 > 0 \right\} = \,]-1, 1[$$

$$\lim_{x \to b = 1} f(x) = +\infty \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^p} \quad p > 0 \qquad \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow{x \to 1^-}$$

N° FINITO

$f(x) \xrightarrow{x \to 1^-} +\infty$ CON LA STESSA VELOCITÀ DI $\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$ $p = 1/2$ CONVERGE

$\int f(x)$ CONVERGE