Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

3 febbraio 2022

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo complessivo** per la prova è di **1h 30'**.
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Esercizio 1

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario

$$\begin{aligned} \min\ & 3z_1 - 6z_2 + z_3 + 5z_4 - 4z_5 - 2z_6 \\ & 2z_1 + z_2 + 2z_3 - z_4 - z_5 - z_6 \ \geq \ 0 \\ & z \in \{0,1\}^6, \end{aligned} \qquad (K_0)$$

e lo si risolva con il metodo del B&B in $\mathbb{R}^6$.

SOLUZIONE:

Si osservi che il punto (preso per ispezione visiva rapida) a coordinate intere $\tilde{z} = (1,0,0,0,0,0)^T$ è ammissibile per il problema e gli corrisponde il valore della funzione obiettivo $f(\tilde{z}) = 3$. Quindi $\tilde{z}$ rappresenta il nostro ottimo corrente del problema. Osservando poi i segni delle variabili del problema (K_0), dobbiamo innanzitutto moltiplicare il vincolo per -1 e trasformare 'min' in 'max', ottenendo il problema

$$\begin{aligned} \max\ & -3z_1 + 6z_2 - z_3 - 5z_4 + 4z_5 + 2z_6 \\ & -2z_1 - z_2 - 2z_3 + z_4 + z_5 + z_6 \ \leq \ 0 \\ & z \in \{0,1\}^6, \end{aligned} \qquad (\bar{K}_0)$$

da cui deduciamo che:

- $z_1 = 1 - y_1$ (infatti z_1 ha segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo);
- $z_2 = 1$ (infatti z_2 ha segno positivo nella funzione obiettivo, i.e. incrementa quest'ultima, e segno negativo nel vincolo, i.e. contribuisce ad aumentare il termine noto);
- $z_3 = 1 - y_3$ (infatti z_3 ha segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo);
- $z_4 = 0$ (infatti z_4 ha segno negativo nella funzione obiettivo, i.e. decrementa quest'ultima, e segno positivo nel vincolo, i.e. contribuisce a diminuire il termine noto).

Di conseguenza il problema diventa

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_1 + y_3 + 4z_5 + 2z_6 + 2 \\ & 2y_1 + 2y_3 + z_5 + z_6 \ \leq \ 5 \\ & y_1, y_3, z_5, z_6 \in \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_0)$$

Possiamo ora creare la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$, dalla quale estraiamo l'unico problema $(\tilde{K}_0)$ presente. Ne consideriamo il rilassamento lineare ed ordiniamo in modo non crescente i rapporti dei coefficienti (i.e. 3/2, 1/2, 4/1 e 2/1) delle 4 variabili y_1, y_3, z_5, z_6, ottenendo il nuovo ordinamento z_5, z_6, y_1, y_3. Passiamo pertanto a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$\begin{aligned} \max\ & 4z_5 + 2z_6 + 3y_1 + y_3 + 2 \\ & z_5 + z_6 + 2y_1 + 2y_3 \ \leq \ 5 \\ & y_1, y_3, z_5, z_6 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Si ottiene $h = 3$, da cui per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$ si ha $z_5 = y_1 = z_6 = 1$ e $y_3 = 1/2$, cui corrisponde il valore della funzione obiettivo 11. Ma dal momento che a quest'ultimo non corrisponde un punto a coordinate intere, allora chiudiamo $(\tilde{K}_0)$ ed effettuiamo il *branching* sulla variabile y_3. Si ottengono i due sottoproblemi (dove rispettivamente $y_3 = 0$ e $y_3 = 1$)

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4z_5 + 2z_6 + 3y_1 + 2 \\
& z_5 + z_6 + 2y_1 \ \leq \ 5 \\
& y_1, z_5, z_6 \in \{0,1\}.
\end{aligned}
\qquad (\tilde{K}_1)
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4z_5 + 2z_6 + 3y_1 + 3 \\
& z_5 + z_6 + 2y_1 \ \leq \ 3 \\
& y_1, z_5, z_6 \in \{0,1\}.
\end{aligned}
\qquad (\tilde{K}_2)
$$

che aggiungiamo alla lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{K}_1)$ che, ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $\bar{z}^{(1)} = (0,1,1,0,1,1)^T$ con valore della funzione $11 > f(\tilde{z}) = 3$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente, ponendo $\tilde{z} = (0,1,1,0,1,1)^T$ e $f(\tilde{z}) = 11$.
Similmente estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che (con analogo conto) ammette una soluzione rilassata (non intera) $\bar{z}^{(2)} = (1/2,1,1,0,1,1)^T$ con valore della funzione $10.5 < f(\tilde{z}) = 11$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ senza aggiornare l'ottimo corrente $\tilde{z}$. Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha

$$z^* = \tilde{z} = (0,1,1,0,1,1)^T, \qquad f(z^*) = 11.$$

Esercizio 2

In occasione della tornata elettorale dei rappresentanti degli studenti, negli organi collegiali di Ca' Foscari, l'ateneo prevede l'allestimento di 10 cabine elettorali disseminate tra le sedi dell' ateneo. L'elettorato studentesco (i.e. il numero di studenti votanti) è pari a 19000 unità e ciascuno studente deve essere assegnato ad una ed una sola cabina. A ciascuna cabina l'ateneo deve anche assegnare un numero di scrutatori (i.e. membri dello staff che verificano la regolarità delle votazioni) che dipende dal numero di votanti in ciascuna cabina. Se ad una cabina viene assegnato un numero di studenti che supera di 400 volte il numero degli scrutatori, allora è necessario sostenere un costo aggiuntivo pari a 10000 Euro. Si formuli un modello di PL/PLI dal quale risulti chiara l'assegnazione della cabina a ciascuno studente ed il numero di scrutatori di ciascuna cabina, minimizzando il numero totale degli scrutatori ed i costi aggiuntivi, sulla base delle specifiche di seguito riportate:

- per problemi organizzativi ad ogni cabina vanno assegnati almeno 500 studenti ma non più di 2000 studenti;
- ciascuna cabina deve avere almeno 2 scrutatori ma non più di 6 scrutatori;
- se alla cabina 3 viene assegnato un numero di studenti che supera di 400 volte il numero degli scrutatori, allora anche alla cabina 4 oppure (*out–out*) alla cabina 5 deve essere assegnato un numero di studenti che supera di 400 volte il numero degli scrutatori;
- i primi 10000 studenti non possono essere assegnati alle cabine 2 e 3, mentre gli ultimi 400 studenti vanno assegnati alla cabina 8.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$\alpha \in \{0,1\}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } i\text{−simo viene assegnato alla cabina } j\text{−sima,} \\ & i = 1,\dots,19000, \quad j = 1,\dots,10 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il numero di studenti assegnati alla cabina } j\text{−sima supera di 400 volte,} \\ & \text{il numero degli scrutatori, } j = 1,\dots,10 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$z_j = \text{numero di scrutatori assegnati alla cabina } j\text{-sima}, \quad j = 1,\dots,10$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{10} z_j + 10^4 \sum_{j=1}^{10} y_j$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, 19000,\\
&500 \le \sum_{i=1}^{19000} x_{ij} \le 2000, \quad j = 1, \ldots, 10,\\
&2 \le z_j \le 6, \quad j = 1, \ldots, 6,\\
&y_j \ge \frac{\sum_{i=1}^{19000} x_{ij} - 400 z_j}{M}, \quad j = 1, \ldots, 10, \quad M \gg 1,\\
&y_3 \le y_4 + \alpha M,\\
&y_3 \le y_5 + (1-\alpha) M,\\
&x_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, 10000, \quad j = 2, 3,\\
&x_{i8} = 1, \quad i = 18600, \ldots, 19000,\\
&z_j \ge 0, \quad \text{intera}, \quad j = 1, \ldots, 10.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Si determini in $\mathbb{R}^3$ il numero massimo di vertici (ove presenti) del seguente poliedro. Nel caso in cui il poliedro ammetta vertici si determinino questi ultimi.

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 \leq 0 \\ -x_2 \geq 2 \\ x_2 + x_3 \leq -5 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Si noti che risulta $m = 4$ ed $n = 3$ pertanto il numero massimo di possibili vertici del poliedro sarà dato da

$$\frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

e varrà pertanto la seguente casistica:

- eliminiamo il I vincolo ed associamo uguaglianze alle disuguaglianze, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -5 \end{cases} \Longrightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

che non soddisfa il I vincolo, pertanto P_1 NON È un vertice;

- eliminiamo il II vincolo ed associamo uguaglianze alle disuguaglianze, ottenendo

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = -2 \\ -x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -5 \end{cases} \Longrightarrow P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

che soddisfa anche il II vincolo ed è inoltre

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

pertanto P_2 È un vertice;

- eliminiamo il III vincolo ed associamo uguaglianze alle disuguaglianze, ottenendo

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = -5 \end{cases} \Longrightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

che soddisfa anche il III vincolo ed è inoltre

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

pertanto P_3 È un vertice;

- eliminiamo il IV vincolo ed associamo uguaglianze alle disuguaglianze, ottenendo

$$\left\{\begin{array}{l} -x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 = 0 \\ -x_2 = 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  che non soddisfa anche il IV vincolo, pertanto P_4 NON È un vertice.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 1}}$

Data la funzione *affine* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, usando (esplicitamente) la definizione di convessità per una funzione reale, si dimostri che gli insiemi di livello di $f(x)$ sono convessi.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 2}}$

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa sull'insieme convesso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dimostrare che l'insieme delle soluzioni del problema $\min_{x \in A} f(x)$ è convesso. Si dia poi un esempio numerico di tale problema.