Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

3 settembre 2019

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2018) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 40'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 15'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ (***)

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_2 + 3x_1 - x_4 + x_3 + 4x_6 - x_5 + x_7 \\
& 2x_2 + x_1 - x_4 + 2.3 + 2x_3 - x_6 - x_5 \ \le\ 5 \\
& x \in \{0,1\}^7,
\end{aligned}
\qquad (K_0)
$$

e lo si risolva con il metodo del B&B in $\mathbb{R}^7$.

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (K_0) nel seguente problema

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2z_1 + 3z_2 - z_3 + z_4 + 4z_5 - z_6 + z_7 \\
& 2z_1 + z_2 - z_3 + 2z_4 - z_5 - z_6 \ \le\ 2.7 \\
& z \in \{0,1\}^7.
\end{aligned}
$$

In esso possiamo assegnare facilmente il valore della variabile z_5, i.e. $z_5 = 1$, in quanto ha coefficiente con segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo. Inoltre poniamo $z_3 = 1 - y_3$, $z_6 = 1 - y_6$, con $y_3, y_6 \in \{0,1\}$, in quanto z_3 e z_6 sono presenti con coefficienti di segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo. Infine poniamo $z_7 = 1$ in quanto ha un coefficiente positivo nella funzione obiettivo e nullo nel vincolo. Otteniamo quindi in particolare il problema equivalente

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2z_1 + 3z_2 + y_3 + z_4 + y_6 + 3 \\
& 2z_1 + z_2 + y_3 + 2z_4 + y_6 \ \le\ 5.7 \\
& z_1, z_2, z_4, y_3, y_6 \in \{0,1\}.
\end{aligned}
\qquad (\tilde{K}_0)
$$

Al fine di trovare, per semplice ispezione visiva, una soluzione ammissibile intera per $(\tilde{K}_0)$, poniamo $z_1 = z_2 = z_4 = y_3 = y_6 = 0$: pertanto $(\tilde{K}_0)$ ammette la soluzione intera corrente $\hat{z} = (0,0,1,0,1,1,1)^T$, con $f(\hat{z}) = 3$.

Creiamo ora la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamo l'unico problema $(\tilde{K}_0)$ ivi contenuto. Consideriamo il suo rilassamento lineare ed ordiniamo in modo non crescente i rapporti dei coefficienti delle 5 variabili z_1, z_2, z_4, y_3, y_6, ottenendo il nuovo ordinamento z_2, z_1, y_3, y_6 e z_4

$$
\frac{3}{1} \ \ge\ \frac{2}{2} \ \ge\ \frac{1}{1} \ \ge\ \frac{1}{1} \ \ge\ \frac{1}{2}.
$$

Di conseguenza si passa a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3z_2 + 2z_1 + y_3 + y_6 + z_4 + 3 \\
& z_2 + 2z_1 + y_3 + y_6 + 2z_4 \ \le\ 5.7, \\
& 0 \le z_1, z_2, z_4, y_3, y_6 \le 1.
\end{aligned}
$$

Essendo $h = 4$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$
z_2^{(0)} = 1,\ z_1^{(0)} = 1,\ y_3^{(0)} = 1,\ y_6^{(0)} = 1,\ z_4^{(0)} = \frac{5.7 - (1+2+1+1)}{2} = 0.7/2,
$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $10 + 0.7/2$, quindi superiore al valore $f(\hat{z})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $z_4 = 0$ e $z_4 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 3z_2 + 2z_1 + y_3 + y_6 + 3 \\ & z_2 + 2z_1 + y_3 + y_6 \ \le\ 5.7 \\ & z_1, z_2, y_3, y_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \tag{$\tilde{K}_1$}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3z_2 + 2z_1 + y_3 + y_6 + 4 \\ & z_2 + 2z_1 + y_3 + y_6 \ \le\ 3.7 \\ & z_1, z_2, y_3, y_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \tag{$\tilde{K}_2$}$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{K}_1)$ che, ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $z^{(1)} = (1,1,0,0,1,0,1)^T$ con $f(z^{(1)}) = 10$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente, ponendo $\hat{z} = (1,1,0,0,1,0,1)^T$, con $f(\hat{z}) = 10$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che (con analogo conto) ammette soluzione rilassata data da $z^{(2)} = (1,1,(1-0.7),1,1,1,1)^T$, con $f(z^{(2)}) = 9.7 < 10 = f(\hat{z})$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{z}$. Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha $z^* = \hat{z}$, ovvero ripassando alle variabili $x_1, \ldots, x_7$

$$x^* = (1,1,0,0,0,1,1)^T, \qquad f(x^*) = 10.$$

Esercizio 2

Si considerino le funzioni $\phi_1(x) = \ln[f(x)]$ e $\phi_2(x) = 1/\ln[f(x)]$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione lineare. Si dica (argomentandolo) se le funzioni $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ risultano convesse/concave nell'intervallo aperto $(1, 100]$. Si dica anche se le medesime funzioni risultano convesse/concave nell'intervallo chiuso $[1, 100]$.

SOLUZIONE:

Essendo $f(x)$ una funzione lineare, di conseguenza sarà anche

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall \lambda \in [0,1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Essendo poi $\ln(y)$ una funzione concava in $(0, +\infty)$, sarà anche (per $f(x), f(y) > 0$)

$$\ln\{f[\lambda x + (1-\lambda)y]\} = \ln\{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\} \geq \lambda \ln[f(x)] + (1-\lambda)\ln[f(y)],$$

ovvero $\phi_1(x)$ è una funzione *concava* per ogni $x \in (1, 100)$ (assumendo che $f(x) > 0$). Per quanto riguarda $\phi_2(x)$, basta osservare che quest'ultima (ove definita) è simmetrica di $\phi_1(x)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, pertanto $\phi_2(x)$ è *convessa* in $(1, 100)$ laddove $\phi_1(x)$ risulta concava. Infine, sia $\phi_1(x)$ che $\phi_2(x)$ rimangono ben definite e (rispettivamente) concava/convessa anche in $[1, 100]$, purchè $f(x) > 0$, per ogni $x \in [1, 100]$ e $\ln[f(x)] \neq 0$.

Esercizio 3

Si vuole minimizzare i costi di consegna di due tipi di motozappe, dagli stabilimenti di produzione a quattro rivenditori diversi. È previsto un costo (Euro) di consegna diverso per ogni modello di motozappa e per ogni rivenditore, come riassunto nella seguente tabella:

Tipo motozappa	rivenditore 1	rivenditore 2	rivenditore 3	rivenditore 4
motozappa 1	115	125	120	155
motozappa 2	165	190	180	195

Le modalità con cui la consegna delle motozappe deve avvenire sono le seguenti:

- per ogni tipo di motozappa, se ad un rivenditore vengono inviate almeno 8 motozappe, va pagato (per quel rivenditore) un costo fisso aggiuntivo di 400 Euro;
- ad ogni rivenditore devono arrivare almeno 4 motozappe del tipo 1 e 5 motozappe del tipo 2;
- le motozappe del secondo tipo che vanno inviate al rivenditore 4 non possono eccedere la somma tra il doppio delle motozappe del primo tipo inviate al rivenditore 2 ed il doppio delle motozappe inviate al rivenditore 1;
- per ogni tipo di motozappa, al rivenditore 3 deve arrivare un numero di motozappe almeno pari ad 1/4 delle motozappe che arrivano al rivenditore 2;
- risulta necessario inviare almeno 60 motozappe del tipo 1 e 19 motozappe del tipo 2 ai rivenditori. In particolare, almeno 28 motozappe vanno inviate ai rivenditori 1 e 4.

Si formuli un modello di PL/PLI che fornisca la soluzione del problema di minimizzazione per la consegna delle motozappe ai rivenditori.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y_{ij} = \text{numero di motozappe di tipo } i\text{-simo inviati al rivenditore } j\text{-simo, } i = 1,2,\ j = 1,2,3,4$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se si inviano almeno 8 motozappe di tipo } i-\text{simo al rivenditore } j = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad 115y_{11} + 125y_{12} + 120y_{13} + 155y_{14} + 165y_{21} + 190y_{22} + 180y_{23} + 195y_{24} + 400\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} z_{ij}$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
& y_{24} \leq 2y_{12} + 2\sum_{i=1}^{2} y_{i1} \\
& \sum_{j=1}^{4} y_{1j} \geq 60, \\
& \sum_{j=1}^{4} y_{2j} \geq 19, \\
& \sum_{i=1}^{2} (y_{i1} + y_{i4}) \geq 28, \\
& y_{i3} \geq \frac{1}{4} y_{i2}, \qquad i = 1,2 \\
& y_{1j} \geq 4, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& y_{2j} \geq 5, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& z_{ij} \geq \frac{x_{ij} - 7}{M}, \qquad j = 1,2,3,4, \qquad M \gg 1 \\
& y_{ij} \geq 0, \ \ intera, \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 (***)

Si consideri il seguente sistema $\mathcal{P}$ di disequazioni nonlineari, dove a e b sono parametri reali. Si dica per quali valori di a e b tale sistema rappresenta un poliedro in $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{P} \quad : \quad \begin{cases} -z_2 + 4 - b\sqrt{z_2} + 3az_1 \geq 4 \\ 6az_1 - 2z_2 \geq 0 \\ -z_1 + z_2 + z_3 + b(z_3)^2 \geq -1 \\ -3z_2 - z_3 + 4 \leq +7. \end{cases}$$

Posto ora $b = 0$, si dica se $\mathcal{P}$ risulta un poliedro e si determinino se possibile i valori del parametro a affinchè $\mathcal{P}$ <u>non</u> ammetta vertici.

<u>SOLUZIONE:</u>

Essendo il poliedro, per definizione, l'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi, il sistema di disequazioni dato rappresenta senz'altro un poliedro se e solo se $b = 0$ (ovvero se e solo se si eliminano le nonlinearità introdotte dalla *radice quadrata* e dal *quadrato*).

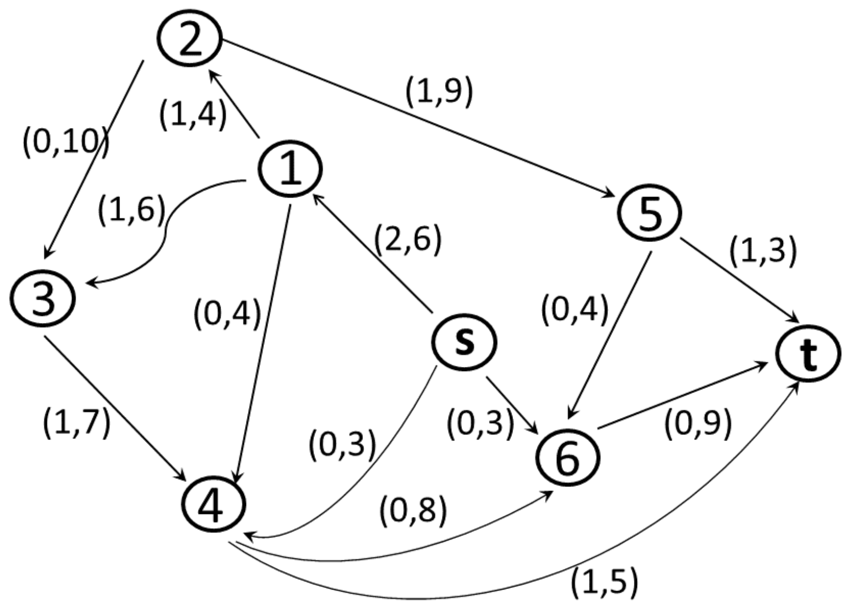
Si noti ora che per $b = 0$ le prime due disequazioni sono equivalenti (per ottenere la seconda basta infatti moltiplicare la prima per $+2$), quindi la seconda disequazione è ridondante e può essere ignorata. Pertanto per $b = 0$ rimangono nel poliedro 3 disequazioni in 3 incognite. Affinchè quest'ultimo ammetta vertici, essendo $n = 3$ ed $m = 3$, deve essere non singolare la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 3a & -1 & 0 \\ -1 & +1 & +1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima ammette determinante nullo se e solo se $a = -1/6$.

Esercizio 5 (***)

Sia dato il seguente grafo: (i) si dica se il grafo risulta orientato, (ii) verificare se il vettore di flusso corrente (nel grafo) è ammissibile, (iii) calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 't' indicando i cammini aumentanti identificati, (iv) indicare (se esiste) un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

(i) Si noti intanto che ogni arco è orientato, pertanto il grafo riulta orientato. (ii) Per ciascun nodo (esclusi la sorgente ed il pozzo) il flusso entrante coincide con quello uscente; inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Per quanto riguarda il punto (iii), il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 2.$$

Inoltre, è possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso indicati di seguito:

- $P_1 = \{s, 6, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 5$
- $P_2 = \{s, 4, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 8$
- $P_3 = \{s, 1, 2, 5, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 10$
- $P_4 = \{s, 1, 4, 6, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 12$.

Relativamente al punto (iv), un taglio a capacità minima è dato dalla seguente coppia di insiemi:

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, t\},$$

che dopo un immediato controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

Domanda Scritta 1 (***)

Si diano, commentandole, le definizioni di classi di complessità $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e $\mathcal{NP}$-complete.

Domanda Scritta 2 (***)

Dato il poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, si dia la definizione di vertice. Inoltre si dica se esistono poliedri non limitati che ammettono vertici e si diano esempi numerici di poliedri con, rispettivamente, *un solo* vertice e *due soli* vertici.

Domanda Scritta 3

Si enuncino e si dimostrino le condizioni (necessaria + sufficiente) affinchè il punto $y^* \in \mathbb{R}^n$ sia massimo locale per il problema concavo $\max_{x \in C} f(x)$, dove $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R}^n)$, è concava su C.