Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

4 giugno 2018

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (29 Novembre 2017) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 25'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 40'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1

Si devono minimizzare i costi di trasporto di due tipi di trattori per uso rurale, dagli stabilimenti di produzione a quattro concessionari diversi. È previsto un costo (Euro) di trasporto per ogni modello di trattore e per ogni concessionario, come riassunto nella seguente tabella:

Tipo trattore	concess. 1	concess. 2	concess. 3	concess. 4
Trattore 1	120	130	125	160
Trattore 2	170	195	185	200

Le modalità con cui il trasporto dei trattori deve avvenire, devono rispettare le seguenti regole:

- ad ogni concessionario devono arrivare almeno 4 trattori del tipo 1 e 5 trattori del tipo 2;
- per ogni tipo di trattore, se ad un concessionario vengono inviati almeno 8 trattori, va pagato (per quel concessionario) un costo fisso aggiuntivo di 400 Euro.
- i trattori del secondo tipo che vanno inviati al concessionario 4 non possono eccedere la somma tra il doppio dei trattori del primo tipo inviati al concessionario 2 ed il doppio dei trattori inviati al concessionario 1.
- risulta necessario inviare almeno 60 trattori del tipo 1 e 19 trattori del tipo 2 ai concessionari. In particolare, almeno 28 trattori vanno inviati ai concessionari 1 e 4;
- per ogni tipo di trattore, al concessionario 3 deve arrivare un numero di trattori almeno pari ad 1/4 dei trattori che arrivano al concessionario 2;

Si formuli un modello di PL/PLI che fornisca la soluzione del problema di minimizzazione per l'invio dei trattori ai concessionari.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y_{ij} = \text{numero di trattori di tipo } i\text{-simo inviati al concessionario } j\text{-simo}, \; i = 1,2, \; j = 1,2,3,4$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se si inviano almeno 8 trattori di tipo } i-\text{simo al concessionario } j = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad 120y_{11} + 130y_{12} + 125y_{13} + 160y_{14} + 170y_{21} + 195y_{22} + 185y_{23} + 200y_{24} + 400\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} z_{ij}$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
& y_{24} \leq 2y_{12} + 2\sum_{i=1}^{2} y_{i1} \\
& \sum_{j=1}^{4} y_{1j} \geq 60, \\
& \sum_{j=1}^{4} y_{2j} \geq 19, \\
& \sum_{i=1}^{2} (y_{i1} + y_{i4}) \geq 28, \\
& y_{i3} \geq \frac{1}{4} y_{i2}, \qquad i = 1,2 \\
& y_{1j} \geq 4, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& y_{2j} \geq 5, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& z_{ij} \geq \frac{x_{ij} - 7}{M}, \qquad j = 1,2,3,4, \qquad M \gg 1 \\
& y_{ij} \geq 0, \; intera, \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

Sia data la funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; si consideri l'insieme $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -3 < f(x) < 5\}$. Si dimostri che l'insieme $\mathcal{L}$ è convesso. Inoltre si dica se tale insieme risulta sempre limitato.

SOLUZIONE:

Ogni funzione lineare risulta anche affine e di conseguenza i suoi insiemi di livello sono convessi, con $f(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$. Dal momento che $\mathcal{L}$ risulta l'intersezione dei due insiemi (convessi) $\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) < 5\}$ e $\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -f(x) < +3\}$ (dove entrambe $f(x)$ e $-f(x)$ risultano affini e quindi convesse), allora $\mathcal{L}$ risulta senz'altro convesso.

Infine, si osservi che $\mathcal{L}$ potrebbe NON essere limitato, come il semplice contro-esempio seguente mostra: $f(x) = 0^T x$.

Esercizio 3

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con

$$g(z) = z_1 \sqrt{\ln(6 - z_3)}.$$

Si dica (argomentandolo) per quali valori di z_1, z_2, z_3 la funzione g ammette derivata direzionale. Inoltre se ne calcoli la derivata direzionale nel punto di coordinate $\bar{z} = (2, 1, 2)^T$, lungo la direzione $d = (3, 0, 3)^T$.

SOLUZIONE:

La funzione $g(x)$ ammette senz'altro derivata direzionale nel caso in cui $z_3 < 5$, in quanto ivi esiste sia la funzione che il suo gradiente. Inoltre, per $\nabla g(z)$ si ha in un intorno del punto $\bar{z}$

$$\nabla g(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{\ln(6 - z_3)} \\ \\ 0 \\ \\ -z_1 \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(6 - z_3)}} \dfrac{1}{6 - z_3} \end{pmatrix},$$

con $\nabla g(\bar{z}) = (\sqrt{\ln(4)} \quad 0 \quad -1/(4\sqrt{\ln(4)}))^T$, ed in $\bar{z}$ si ha

$$D(g, d) = \nabla g(\bar{z})^T d = 3\sqrt{\ln(4)} - 3/(4\sqrt{\ln(4)}) \approx 0,54.$$

Esercizio 4

Si determini in $\mathbb{R}^4$ il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} -x_4 - x_3 \leq 1 \\ 4x_3 \leq -2 \\ x_3 + x_1 \geq +1 \\ x_3 - 2x_1 \leq 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 4$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{4!0!} = 1.$$

Consideriamo pertanto il solo seguente caso:

$$\begin{cases} -x_4 - x_3 = 1 \\ 4x_3 = -2 \\ x_3 + x_1 = 1 \\ x_3 - 2x_1 = 0. \end{cases}$$

Dal momento che la matrice dei coefficienti del sistema lineare precedente risulta avere 4 righe e tre colonne, non potrà mai avere rango 4, pertanto un eventuale punto soluzione del precedente sistema lineare NON può essere vertice. Si conclude che il sistema lineare assegnato non ammette vertici in $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{Esercizio 5 (***)}}$

Si descriva il metodo di Ford e Fulkerson per la soluzione di problemi di flusso massimo su grafi orientati. Si dica inoltre (argomentandolo) se lo stesso metodo può essere usato per risolvere problemi di flusso minimo su grafi orientati.

Esercizio 6 (***)

Si risolva l'esercizio di Knapsack binario in $\mathbb{R}^6$ di seguito riportato, usando il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_5 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_1 \\ & 2x_5 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_1 - x_6 - 1,5 \leq\ 0 \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{aligned} \tag{K_0}$$

SOLUZIONE:

Una volta trasformato il problema (K_0) in

$$\begin{aligned} \max\ & +4x_5 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_1 \\ & 2x_5 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_1 - x_6 \ \leq \ \frac{3}{2} \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{aligned}$$

è possibile assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1 - y_3$, con $y_3^* \in \{0,1\}$, $x_4^* = 1 - y_4^*$, con $y_4^* \in \{0,1\}$, $x_6^* = 1$, in quanto x_2 è presente con segno negativo nella funzione obiettivo e segno positivo nel vincolo, x_3, x_4 hanno segno negativo sia nel vincolo che nella funzione obiettivo, x_6 ha segno negativo nel vincolo e coefficiente nullo nella funzione obiettivo). Si ottiene quindi il seguente problema equivalente semplificato

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_5 + y_3 + 2y_4 + 3x_1 - 3 \\ & 2x_5 + 3y_3 + y_4 + x_1 \ \leq \ \frac{13}{2} \\ & x_5, y_3, y_4, x_1 \in \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_0)$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione (ammissibile) intera corrente $\hat{x} = (\hat{x}_5, \hat{y}_3, \hat{y}_4, \hat{x}_1) = 0$, con $\hat{f}(\hat{x}) = -3$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{K}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili (x_5, y_3, y_4 e x_1), i.e.

$$\frac{3}{1} \ \geq \ \frac{4}{2} \ \geq \ \frac{2}{1} \ \geq \ \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_5 + 2y_4 + y_3 - 3 \\ & x_1 + 2x_5 + y_4 + 3y_3 \ \leq \ \frac{13}{2} \\ & 0 \leq x_5, y_3, y_4, x_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$x_1^{(0)} = 1,\ x_5^{(0)} = 1,\ y_4^{(0)} = 1,\ y_3^{(0)} = \frac{\frac{13}{2} - (1 + 2 + 1)}{3} = 5/6,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a 29/6, quindi superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $y_3 = 0$ e $y_3 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_5 + 2y_4 - 3 \\ & x_1 + 2x_5 + y_4 \ \leq \ \frac{13}{2} \\ & x_5, y_4, x_1 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_5 + 2y_4 - 2 \\ & x_1 + 2x_5 + y_4 \ \leq \ \frac{7}{2} \\ & x_5, y_4, x_1 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema che ammette la soluzione rilassata (coincidente con una soluzione intera) $x^{(1)} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T$ con $f(x^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo $\hat{x} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T$, con $f(\hat{x}) = 6$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che ammette soluzione rilassata data da $x^{(2)} = (1\ 0\ 0\ 1/2\ 1\ 1)^T$, non coincidente con una soluzione intera, con $f(x^{(2)}) = 4$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare questa volta l'ottimo corrente $\hat{x}$. Per la soluzione finale si ha pertanto

$$x^* = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T.$$

Domanda Scritta 1

Si dimostri che data la funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, presi *comunque* i punti $y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^n$ di minimo globale per $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, allora anche il punto $w = (y + z)/2$ è un minimo globale di $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

Domanda Scritta 2 (***)

Si esponga il problema del costo fisso e si discuta *in dettaglio e con un esempio* la sua modellazione mediante un modello di PL/PLI.