Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

7 Febbraio 2025

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (Novembre 2024) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 10'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 35'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Un ristorante stellato deve organizzare una serata di gala predisponendo l'allestimento di 8 tavoli, avendo a disposizione 25 camerieri. Stante la particolarità dell'evento, è necessario pianificare accuratamente a quale tavolo assegnare ciascun cameriere, in relazione ad alcune specifiche di seguito riportate:

- qualora al cameriere i-simo venga associato il tavolo j-simo allora è previsto un costo di assegnazione pari a $c_{i,j}$;
- a ciascun cameriere possono essere assegnati da 1 (minimo) a 4 (massimo) tavoli;
- se ad un tavolo vengono assegnati 4 o più camerieri, allora per questioni di compatibilità logistica si ha un costo di assegnazione pari a P;
- viceversa, se ad un cameriere viene assegnato 1 solo tavolo, allora si verifica uno spreco di risorse ed è previsto un costo di assegnazione pari a Q;
- per questioni di compatibilità ambientale, i camerieri 1 e 4 NON possono essere assegnati *simultaneamente* a nessuno dei tavoli;
- per questioni di compatibilità ambientale, i camerieri 3 e 5 NON possono essere assegnati *simultaneamente* a nessuno dei tavoli;
- dal momento che i camerieri 24 e 25 sono i più esperti, almeno uno tra loro deve essere disponibile per essere assegnato ad 1 solo tavolo (al fine di renderlo maggiormente disponibile in caso di emergenze).

Si formuli un modello di PLM per la minimizzazione dei costi complessivi di assegnazione dei camerieri ai tavoli.

<u>SOLUZIONE:</u>

Scelta variabili:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il cameriere } i-\text{simo viene assegnato al tavolo } j-\text{simo,} \\ & i = 1, \dots, 25, \quad j = 1, \dots, 8, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se si assegnano almeno 4 camerieri al tavolo } j-\text{simo,} \\ & j = 1, \dots, 8, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se si assegna 1 solo tavolo al cameriere } i-\text{simo,} \\ & i = 1, \dots, 25, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ variabili tecniche

Funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{25}\sum_{j=1}^{8} c_{i,j}x_{i,j} + P\sum_{j=1}^{8} y_j + Q\sum_{i=1}^{25} z_i$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&1 \leq \sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \leq 4, \qquad i = 1,\dots,25\\
&y_j \geq \frac{\sum_{i=1}^{25} x_{i,j} - 3}{M}, \qquad j = 1,\dots,8, \quad M \gg 1,\\
&z_i \geq \frac{1.5 - \sum_{j=1}^{8} x_{i,j}}{M}, \qquad i = 1,\dots,25, \quad M \gg 1,\\
&x_{1,j} + x_{4,j} \leq 1, \qquad j = 1,\dots,8,\\
&x_{3,j} + x_{5,j} \leq 1, \qquad j = 1,\dots,8,\\
&\sum_{j=1}^{8} x_{25,j} \leq 1 + \alpha M,\\
&\sum_{j=1}^{8} x_{24,j} \leq 1 + \beta M,\\
&\alpha + \beta \leq 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario in $\mathbb{R}^6$ e lo si risolva con il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \max\ & -2y_2 + 3y_3 - y_4 - y_5 + 4y_6 \\ & -y_1 + \frac{1}{2} - y_2 + y_3 + 3y_4 - 3y_5 + 2y_6 \ \leq\ 2 \\ & y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,6. \end{aligned} \qquad (K_0)$$

SOLUZIONE:

A partire dal problema dato, è possibile assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $y_1^* = 1$, $y_2^* = 1 - z_2^*$, $y_4^* = 0$, $y_5^* = 1 - z_5^*$, essendo $z_2^*, z_5^* \in \{0,1\}$. Si ottiene quindi il seguente problema equivalente semplificato

$$\begin{aligned} \max\ & -2(1-z_2) + 3y_3 - 0 - (1-z_5) + 4y_6 \\ & -1 - (1-z_2) + y_3 + 0 - 3(1-z_5) + 2y_6 \ \leq\ \frac{3}{2} \\ & z_2, y_3, z_5, y_6 \in \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_0)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \max\ & 2z_2 + 3y_3 + z_5 + 4y_6 - 3 \\ & z_2 + y_3 + 3z_5 + 2y_6 \ \leq\ \frac{13}{2} \\ & z_2, y_3, z_5, y_6 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione (ammissibile) intera corrente $\hat{w} = (\hat{z}_2, \hat{y}_3, \hat{z}_5, \hat{y}_6) = 0$, con $\hat{f}(\hat{w}) = -3$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{K}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare, e per risolverlo ordiniamo in modo decrescente i rapporti dei coefficienti delle 4 variabili $(z_2,\ y_3,\ z_5,\ y_6)$, i.e.

$$\frac{3}{1} \ \geq\ \frac{4}{2} \ \geq\ \frac{2}{1} \ \geq\ \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_3 + 4y_6 + 2z_2 + z_5 - 3 \\ & y_3 + 2y_6 + z_2 + 3z_5 \ \leq\ \frac{13}{2} \\ & 0 \leq y_3, y_6, z_2, z_5 \leq 1. \end{aligned}$$

Risulta $h = 3$, da cui si ottiene la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$y_3^{(0)} = 1,\ y_6^{(0)} = 1,\ z_2^{(0)} = 1,\ z_5^{(0)} = \frac{\frac{13}{2} - (1+2+1)}{3} = 5/6,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5/6 - 3 = 41/6 \approx 6.83$, quindi superiore al valore $f(\hat{w})$. Di conseguenza chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $z_5 = 0$ e $z_5 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_3 + 4y_6 + 2z_2 - 3 \\ & y_3 + 2y_6 + z_2 \ \leq\ \frac{13}{2} \\ & y_3, y_6, z_2 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_3 + 4y_6 + 2z_2 - 2 \\ & y_3 + 2y_6 + z_2 \ \leq\ \frac{7}{2} \\ & y_3, y_6, z_2 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_2)$$

aggiornando poi anche la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo da questa il primo problema che ammette la soluzione rilassata $y_3 = y_6 = z_2 = 1$ (coincidente con una soluzione intera), che nel dominio delle variabli originali del problema diventa $y^{(1)} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T$ con $f(y^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo $\hat{w} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T$, con $f(\hat{w}) = 6$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che ammette soluzione rilassata data da $y_3 = y_6 = 1$, $z_2 = 1/2$, che nel dominio delle variabli originali del problema diventa $y^{(2)} = (1\ 1/2\ 1\ 0\ 0\ 1)^T$, non coincidente con una soluzione intera. Ad essa corrisponde un valore della funzione obiettivo dato da $f(y^{(2)}) = 6$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare questa volta l'ottimo corrente $\hat{w}$. Per la soluzione finale si ha pertanto

$$y^* = \hat{w} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T.$$

Esercizio 3 (***)

Si considerino le seguenti uguaglianze e disuguaglianze in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} -x_3 \leq 0 \\ x_3 + x_2 + x_1 = 0 \\ 8 - 2x_3 + x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Si dica (motivandolo espressamente) se tali uguaglianze/disuguaglianze identificano un *poliedro*. In caso di risposta affermativa, trovare prima il massimo numero di vertici per tale poliedro e poi determinare i vertici stessi (qualora ve ne siano).

SOLUZIONE:

Dal momento che tutte le uguaglianze/disuguaglianze sono associate a funzioni lineari/affini, allora l'intersezione dei tre vincoli rappresenta un'intersezione finita di iperpiani e semispazi, pertanto è un poliedro. Inoltre, tale poliedro può contenere al massimo un numero di vertici pari al numero di terne (tre variabili) di vincoli. Pertanto tale numero sarà banalmente pari a

$$\frac{3!}{3!(3-3)!} = 1.$$

Affinchè l'unico possibile punto di vertice P lo sia davvero, devono verificarsi le seguenti condizioni:

- P soddisfa il sistema di equazioni/disequazioni,
- esistono in P almeno 3 vincoli del sistema attivi,
- il numero di vincoli attivi in P che risultano anche linearmente indipendenti deve essere esattamente uguale a 3.

Pertanto isoliamo ora l'unica possibile terna di vincoli associate al sistema di equazioni/disequazioni assegnate. Trasformando le relazioni in equazioni si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -8 \end{cases}$$

che presenta determinante pari a $1 \neq 0$, nonchè la soluzione $P = (8, -8, 0)$. Pertanto il punto $(8, -8, 0)$ è l'unico vertice del poliedro assegnato.

Domanda Scritta 1 (***)

Dato il problema ($c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned} \min\, & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

si calcoli prima il gradiente della funzione obiettivo. Inoltre si dimostri che tale gradiente è ortogonale alle curve di livello della funzione obiettivo ed è orientato nel verso crescente di quest'ultima.

Domanda Scritta 2 (***)

Considerata la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si dimostri esplicitamente (i.e. usando la definizione di convessità) che lo spazio nullo $N[A]$ è un insieme convesso.

Domanda Scritta 3

Considerata la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si dica (dimostrando *esplicitamente* l'asserto) se lo spazio nullo $N[A]$ rappresenta uno spazio vettoriale, indicandone anche la dimensione.