Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

08 giugno 2023

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (09 Novembre 2022) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 35'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 55'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Per le festività natalizie un fioraio deve consegnare piante di 5 diverse varietà a 4 imprese. In particolare, se si consegna la varietà di pianta 2 alla seconda o alla terza impresa, allora bisognerà pagare un costo fisso pari a 50 Euro (affitto di un furgone supplementare), da aggiungere ai costi di produzione delle piante. In particolare, il costo di produzione delle piante è riportato nella seguente tabella:

Varietà di piante	Costo unitario
varietà 1	6.50 Euro
varietà 2	12.00 Euro
varietà 3	8.00 Euro
varietà 4	15.00 Euro
varietà 5	13.50 Euro

Inoltre sono note le seguenti informazioni relativamente al trasporto delle piante:

- le piante di tipo 2 non possono essere trasportate all'impresa 3, a causa di possibili allergie ai dipendenti di tale impresa;
- il numero complessivo delle piante della varietà 3 trasportate nelle prime 2 imprese non può essere inferiore al numero delle piante di tipo 3 trasportate alle restanti 2 imprese;
- le piante trasportate complessivamente alle imprese 1 e 4 deve essere compreso tra il numero di piante inviate all'impresa 2 ed il doppio delle piante inviate all'impresa 3;
- vanno trasportate complessivamente almeno 150 piante mentre per ogni varietà di queste ultime ne sono disponibili al più 40 unità, ed ogni impresa non ne può richiedere più di 45.

Si formuli un modello di PL/PLI in base al quale si determini il numero di piante da consegnare alle imprese, in modo tale da minimizzare i costi complessivi.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{se si si consegna la varieta}' \text{ di pianta 2 alla seconda o alla terza impresa} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \text{numero di piante di tipo } i\text{-simo consegnate all'impresa } j\text{-sima } (i = 1, \dots, 5;\ j = 1, 2, 3, 4)$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{4} (6.5x_{1j} + 12x_{2j} + 8x_{3j} + 15x_{4j} + 13.5x_{5j}) + 50y_2$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
& x_{23} = 0, \\
& \sum_{j=1}^{2} x_{3j} \ge \sum_{j=3}^{4} x_{3j}, \\
& \sum_{i=1}^{5} x_{i2} \le \sum_{i=1}^{5} x_{i1} + \sum_{i=1}^{5} x_{i4} \le 2 \sum_{i=1}^{5} x_{i3}, \\
& \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \ge 150, \\
& \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le 40, \qquad i = 1,2,3,4,5 \\
& \sum_{i=1}^{5} x_{ij} \le 45, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& y_2 \ge \frac{x_{22} + x_{23}}{M}, \qquad M \gg 1, \\
& x_{ij} \ge 0, \; intera, \qquad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Siano date le funzioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; si dimostri che i problemi di ottimizzazione

$$
\begin{array}{lcl}
\min \; 2f(x) - 3g(x) & & \min \; f(x) + g(x) \\
\quad |f(x)| \le 2 & \text{e} & \quad |f(x)| \le 2 \\
\quad |g(x)| \le 1 & & \quad |g(x)| \le -1
\end{array}
$$

sono convessi. Si trovi anche una possibile soluzione per il secondo problema di ottimizzazione.

SOLUZIONE:

Si noti che per la linearità di $f(x)$ si ha

$$
\begin{cases}
f(x+y) = f(x) + f(y) & \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\
f(\lambda x) = \lambda f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

e per la linearità di $g(x)$ si ha

$$
\begin{cases}
g(x+y) = g(x) + g(y) & \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\
g(\lambda x) = \lambda g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Pertanto si ha che la funzione $2f(x) - 3g(x)$ (similmente per la funzione $f(x) + g(x)$) risulta lineare in quanto

$$
\begin{cases}
2f(x+y) - 3g(x+y) = 2f(x+y) - 3g(x+y) = [2f(x) - 3g(x)] + [2f(y) - 3g(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\
2f(\lambda x) - 3g(\lambda x) = 2\lambda f(x) - 3\lambda g(x) = \lambda[2f(x) - 3g(x)], \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Inoltre i vincoli $|f(x)| \le 2$ sono equivalenti ad avere $-2 \le f(x) \le 2$. Questi ultimi rappresentano naturalmente due vincoli lineari, in quanto $f(x)$ è una funzione lineare. Simile conclusione si ha per i vincoli $|g(x)| \le 1$. Ciò prova che il primo problema di ottimizzazione è senz'altro un problema di PL. Anche il secondo problema di ottimizzazione risulta essere di PL, per analoghi motivi, ma dal momento che il vincolo $|g(x)| \le -1$ non può mai essere soddisfatto, l'insieme ammissibile del secondo problema di ottimizzazione sarà vuoto.

Esercizio 3 (***)

Si consideri il seguente poliedro in $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 + ay_4 \geq 0 \\ 2y_2 + y_4 + 2y_5 \geq 0 \\ y_3 \leq 0 \\ -3y_4 - dy_5 \geq 0 \\ -y_3 + ey_5 = 0 \end{cases}$$

dove $\{a, d, e\}$ sono parametri reali e $\{y_1, \ldots, y_5\}$ rappresentano le variabili. Si determinino i valori dei parametri $\{a, d, e\}$ in modo tale che (ciascuna delle seguenti richieste è indipendente dalle altre):

1. esista un unico vertice del poliedro in $\mathbb{R}^5$ (e lo si determini);
2. esistano almeno due vertici distinti del poliedro in $\mathbb{R}^5$;
3. scartando il *III vincolo* del poliedro, esistano vertici del poliedro in $\mathbb{R}^5$.

SOLUZIONE:

1. affinchè esista unico il vertice del poliedro deve risultare (esistenza di 5 vincoli attivi linearmente indipendenti)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -d \\ 0 & 0 & -1 & 0 & e \end{vmatrix} = -18e \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e \neq 0.$$

   Pertanto se $e \neq 0$ il punto di vertice v risulta essere dato da $v = (0, 0, 0, 0, 0)^T$.

2. non è possibile soddisfare questa richiesta, in quanto non esistono due distinti sottoinsiemi di 5 vincoli attivi, in cui ogni sottoinsieme contenga vincoli linearmente indipendenti;
3. non è possibile soddisfare questa richiesta, in quanto non possono esistere vertici, essendo il numero di vincoli inferiore rispetto al numero delle variabili (i.e. $m < n$).

Domanda Scritta 1

Dato l'insieme in $\mathbb{R}^3$ definito attraverso le seguenti uguaglianze lineari

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

si dimostri (applicando la definizione) che risulta convesso. Inoltre si dica se tale insieme è un poliedro di $\mathbb{R}^3$ e si dica anche (motivandolo) se contiene almeno uno degli assi coordinati.

Domanda Scritta 2 (***)

Si descriva sinteticamente l'algoritmo del Branch & Bound per un problema lineare intero di minimizzazione.

Domanda Scritta 3 (***)

Si consideri il poliedro $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, e si assuma che sia anche contenuto nella sfera di centro l'origine e raggio pari a 10. Dato il problema

$$\min_{x \in \mathcal{P}} c^T x$$

si enunci per esso il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Inoltre si dia un esempio numerico del poliedro $\mathcal{P}$ che ammetta esattamente i vertici e_1, $-e_1$, e_2 e $-e_2$, essendo e_1, e_2 i versori degli assi coordinati.