Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

8 settembre 2020: Esame in REMOTO

Regole per l'esame: la violazione comporta l'esclusione dello studente

- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente, prima di effettuarne la scansione ed il successivo invio al docente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario **indicare sul primo foglio** se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2019) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 20'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 50'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova, avere vicino persone, usare testi/appunti/note/dispense.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dalla postazione di fronte al proprio PC/laptop, rimanendo nella visuale della fotocamera e con il microfono acceso.

Esercizio 1 (***)

Si consideri un problema di B&B per la PLI. È noto che all'iterazione corrente la lista $\mathcal{L}$ dei problemi aperti contiene i 6 problemi $\{(P1),(P2),(P3),(P4),(P5),(P6)\}$. È anche noto che il problema di B&B sia un problema di *massimizzazione*. Inoltre il valore *ottimo corrente* della funzione obiettivo sia $\tilde{z} = 22$, corrispondente alla soluzione corrente (intera) $\tilde{x}$. Per la soluzione *rilassata* del problema (Pi) è noto che

	Valore funz. obiettivo di Pi, nella soluz. rilassata x_i	soluzione rilassata x_i di Pi
P1	z_1	x_1
P2	z_2	x_2
P3	z_3	x_3
P4	z_4	x_4
P5	z_5	x_5
P6	z_6	x_6

Si forniscano (motivandole) le condizioni che devono soddisfare le quantità $\{z_i\}$ e la natura (punto a coordinate intere, oppure punto a coordinate non intere) dei punti $\{x_i\}$, affinchè: nello schema di B&B se si estraggono dalla lista i problemi P2, P3 si aggiornerà sia $\tilde{z}$ che $\tilde{x}$, se si estraggono dalla lista P1 o P6 si aggiornerà $\tilde{z}$ ma NON $\tilde{x}$, infine se si estraggono dalla lista P4 o P5 NON si aggiornerà nè $\tilde{z}$ nè $\tilde{x}$.

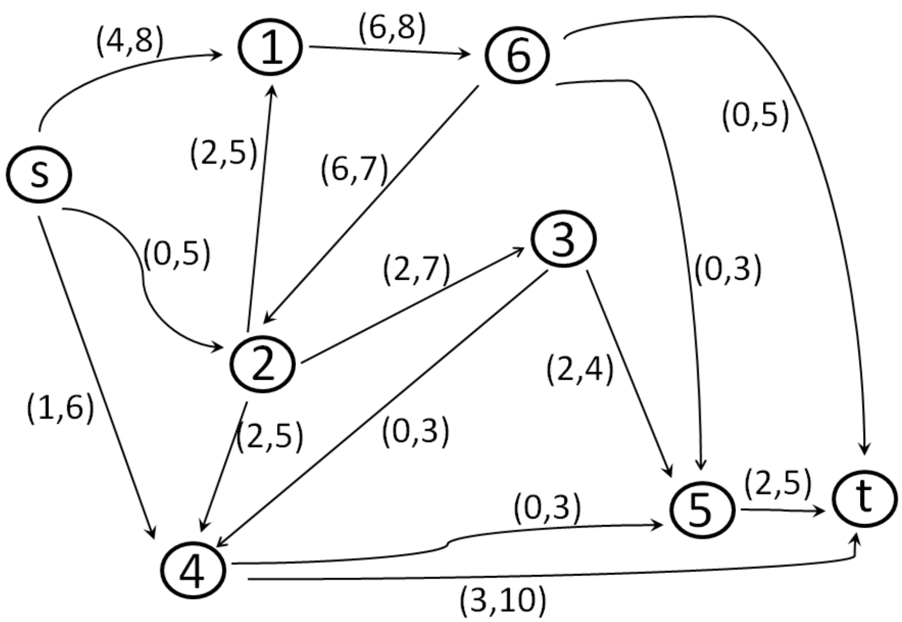
SOLUZIONE:

Si tratta di un problema di *massimizzazione*, pertanto se all'iterazione corrente vine estratto il problema Pi dalla lista, si avrà un aggiornamento per $\tilde{z}$ e $\tilde{x}$ se e solo se $z_i > \tilde{z}$ e x_i risulta a coordinate intere. Pertanto dovrà essere

- $z_2 > 22$, $z_3 > 22$, con x_2 ed x_3 a coordinate intere;
- non è possibile che estraendo P1 o P6 si aggiorni SOLO $\tilde{z}$ ma NON $\tilde{x}$;
- $z_4 \le 22$, $z_5 \le 22$, potendo essere x_4 ed x_5 indifferentemente a coordinate intere oppure a coordinate reali.

Esercizio 2

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo ‘s’, ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

Dopo una facile verifica il vettore di flusso risulta ammissibile (sono soddisfatti i vincoli di conservazione ed i vincoli di capacità). Inoltre, il valore del flusso iniziale è

$$F_0 = 5.$$

Alcuni possibili cammini aumentanti, con i relativi valori della variazione del flusso δ apportati, sono elencati di seguito:

- $P_1 = \{s, 1, 6, t\}$, con $\delta = 2$, da cui $F_1 = F_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, 4, t\}$, con $\delta = 5$, da cui $F_2 = F_1 + \delta = 12$
- $P_3 = \{s, 2, 6, t\}$, con $\delta = 3$, da cui $F_3 = F_2 + \delta = 15$
- $P_4 = \{s, 2, 4, t\}$, con $\delta = 2$, da cui $F_4 = F_3 + \delta = 17$
- $P_5 = \{s, 1, 2, 3, 5, t\}$, con $\delta = 2$, da cui $F_5 = F_4 + \delta = 19$.

Inoltre, dopo facile verifica, un taglio a capacità minima è dato da $(W, \bar{W})$, con

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, t\}.$$

Esercizio 3 (***)

Nell'imminenza di una consulazione referendaria si devono assegnare 6 seggi elettorali, ognuno con un'unica urna per votare, a 4 città. Ad ogni città deve essere assegnato almeno un seggio elettorale. Conoscendo il numero di elettori di ognuna delle 4 città, pari rispettivamente a 720, 3680, 4400, 1200, l'obiettivo è quello di trovare una distribuzione dei seggi che minimizzi il massimo numero di votanti assegnati ad uno stesso seggio.
Descrivere un modello di PL/PLI, per l'assegnazione dei votanti ai seggi nelle città, nel quale una variabile rappresenti il numero di votanti assegnati a ciascun seggio. Inoltre si consideri che in ogni città deve essere presente almeno un seggio.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$t \quad = \quad \text{variabile di supporto da minimizzare}$$

$$x_{ij} \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{se il seggio } i\text{−simo viene assegnato alla citta}' \ j\text{−sima,} \\ & i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, 4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_{ij} \quad = \quad \text{numero di abitanti assegnati al seggio } i\text{-simo, presente nella citta' } j\text{-sima}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \qquad t$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{6} x_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \ldots, 4, \\
&\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, 6, \\
&y_{ij} \leq t, \quad i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, 4, \\
&\sum_{i=1}^{6} y_{i1} = 720, \\
&\sum_{i=1}^{6} y_{i2} = 3680, \\
&\sum_{i=1}^{6} y_{i3} = 4400, \\
&\sum_{i=1}^{6} y_{i4} = 1200, \\
&x_{ij} \geq \frac{y_{ij}}{M}, \quad i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, 4, \quad M \gg 1, \\
&y_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, 4, \\
&t \geq 0, \\
&x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, 4,
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Si determini in $\mathbb{R}^3$ il numero massimo di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} w_1 \geq 0 \\ -1 + w_2 + w_3 \geq 4 \\ 7 \leq 3w_3 \\ -w_1 + w_2 = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Il poliedro può contenere al massimo un numero di vertici pari al numero di terne (tre variabili) di vincoli. Pertanto tale numero sarà

$$\frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Affinchè un punto P sia un vertice devono verificarsi le seguenti condizioni:

- P soddisfa il sistema di equazioni/disequazioni,
- esistono in P almeno 3 vincoli del sistema attivi,
- il numero di vincoli attivi in P che risultano anche linearmente indipendenti deve essere esattamente uguale a 3.

Pertanto isoliamo ora le 4 possibili terne di vincoli associate al sistema di equazioni/disequazioni lineari.

- Caso I: escludiamo la I disequazione e trasformiamo le rimanenti relazioni in equazioni, ottenendo:

  $$\begin{cases} w_2 + w_3 = 5 \\ 3w_3 = 7 \\ -w_1 + w_2 = 2 \end{cases}$$

  che presenta determinante pari a $-3 \neq 0$, nonchè la soluzione $(2/3 \;\; 8/3 \;\; 7/3)$, la quale soddisfa anche il I vincolo. Pertanto il punto $(2/3 \;\; 8/3 \;\; 7/3)$ è vertice del poliedro assegnato.

- Caso II: escludiamo la II disequazione e trasformiamo le rimanenti relazioni in equazioni, ottenendo:

  $$\begin{cases} w_1 = 0 \\ 3w_3 = 7 \\ -w_1 + w_2 = 2 \end{cases}$$

  che presenta determinante pari a $-3 \neq 0$, nonchè la soluzione $(0 \;\; 2 \;\; 7/3)$, la quale NON soddisfa anche il II vincolo. Pertanto il punto $(0 \;\; 2 \;\; 7/3)$ NON è vertice del poliedro assegnato.

  Caso III: escludiamo la III disequazione e trasformiamo le rimanenti relazioni in equazioni, ottenendo:

  $$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 + w_3 = 5 \\ -w_1 + w_2 = 2 \end{cases}$$

  che presenta determinante pari a $-1 \neq 0$, nonchè la soluzione $(0 \;\; 2 \;\; 3)$, la quale soddisfa anche il III vincolo. Pertanto il punto $(0 \;\; 2 \;\; 3)$ è vertice del poliedro assegnato.

- Caso II: escludiamo il IV vincolo e trasformiamo le rimanenti relazioni in equazioni, ottenendo:

  $$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 + w_3 = 5 \\ 3w_3 = 7 \end{cases}$$

  che presenta determinante pari a $3 \neq 0$, nonchè la soluzione $(0 \;\; 8/3 \;\; 7/3)$, la quale NON soddisfa anche il IV vincolo. Pertanto il punto $(0 \;\; 8/3 \;\; 7/3)$ NON è vertice del poliedro assegnato.

Esercizio 5 (***)

Si consideri il seguente problema di Knapsack binario, contenente i parametri $a \geq 0$ e $b \geq 0$:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 3ax_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2ax_6 \\ & x_1 - bx_2 + x_3 + bx_4 - 2x_5 \;\leq\; 6 \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{array} \qquad (L_0)$$

Trovare i valori più piccoli per i parametri a e b tali che (L_0) ammetta soluzione, senza necessità di effettuare branching in uno schema di B&B, affinchè la funzione obiettivo all'ottimo non superi il valore 3.

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (L_0) nel seguente problema

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3ax_2 - 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 - 2ax_6 \\ & x_1 - bx_2 + x_3 + bx_4 - 2x_5 \leq 6 \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{array}$$

Inoltre alcune variabili sono immediatamente assegnabili sulla base dei segni dei propri coefficienti, e si ha: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 - y_5$, $x_6 = 0$, ottenendo il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 4y_5 + (3a - 4) \\ & x_1 + 2y_5 \leq 8 + b \\ & x_1, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

Riordinando i rapporti tra i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ed i coefficienti delle stesse nel vincolo, si ottiene

$$\frac{4}{2} \geq \frac{1}{1}$$

da cui il problema (L_1) diventa

$$\begin{array}{ll} \max & 4y_5 + x_1 + (3a - 4) \\ & 2y_5 + x_1 \leq 8 + b \\ & x_1, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

che ammette immediatamente soluzione intera per ogni $b \geq 0$. Affinchè siano soddisfatte le richieste sui parametri basta prendere $b = 0$ e $a = 2/3$. In tal modo il processo di soluzione del problema (L_0) NON richiede di effettuare alcun branching, risultando $x_1 = 1$ e $y_5 = 1$.

Domanda Scritta 1 (***)

Si enunci il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare, distinguendo il caso in cui l'insieme ammissibile sia un generico poliedro, dal caso in cui l'insieme ammissibile sia un polìtopo.

Domanda Scritta 2 (***)

Siano dati i vettori reali b_1, b_2, b_3 e le matrici $B_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ e $B_3 \in \mathbb{R}^{m_3 \times n}$. Si trasformi esplicitamente il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ B_1 x \geq b_1, \ B_2 x \leq b_2, \ B_3 x = b_3\}$ nella *forma standard*.

Domanda Scritta 3

Data la funzione $f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$; sia $d \in \mathbb{R}^n$, con $0 < \|d\| < \infty$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Sia $\nabla f(\bar{x})^T d \neq 0$; allora, d è una direzione di discesa per $f(x)$ in $\bar{x}$ se e solo se risulta

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0.$$