Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

9 gennaio 2020

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2019) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 40'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 15'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ (***)

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 - 3x_7 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \ \leq \ 2 \\ & x \in \{0,1\}^7, \end{aligned} \qquad (L_0)$$

e lo si risolva con il metodo del B&B in $\mathbb{R}^7$.

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (L_0) nel seguente problema

$$\begin{aligned} \max\ & -(1 - z_1) + 2x_2 + 0 + x_4 + 3 + x_6 + 0 \\ & -2(1 - z_1) + 2x_2 + 3x_4 - 2 + x_6 \ \leq \ 2 \\ & z_1, x_2, x_4, x_6 \in \{0,1\}, \end{aligned}$$

dove si sono sostituite: x_1 con $1 - z_1$ (in quanto x_1 compare con coefficiente negativo sia nel vincolo che nella funzione obiettivo), $x_3 = 0$ (in quanto x_3 ha segno negativo nella funzione obiettivo e coefficiente nullo nel vincolo), $x_5 = 1$ (in quanto x_5 ha segno positivo nella funzione obiettivo e segno negativo nel vincolo), $x_7 = 0$ (in quanto x_7 ha coefficiente negativo nella funzione obiettivo e coefficiente nullo nel vincolo). Otteniamo quindi in particolare il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max\ & z_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 + 2 \\ & 2z_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_6 \ \leq \ 6 \\ & z_1, x_2, x_4, x_6 \in \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{L}_0)$$

Per ottenere una soluzione ammissibile intera di partenza per $(\tilde{L}_0)$, basta porre $z_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0$: pertanto $(\tilde{L}_0)$ ammette la soluzione intera corrente $\hat{z} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$, con $f(\hat{z}) = 2$.

Creiamo ora la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{L}_0)\}$ ed estraiamo l'unico problema $(\tilde{L}_0)$ ivi contenuto. Consideriamo il suo rilassamento lineare ed ordiniamo in modo non crescente i rapporti dei coefficienti delle 4 variabili z_1, x_2, x_4, x_6, ottenendo il nuovo ordinamento x_2, x_6, z_1 e x_4

$$\frac{2}{2} \ \geq \ \frac{1}{1} \ \geq \ \frac{1}{2} \ \geq \ \frac{1}{3}.$$

Di conseguenza si passa a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_2 + x_6 + z_1 + x_4 + 2 \\ & 2x_2 + x_6 + 2z_1 + 3x_4 \ \leq \ 6, \\ & 0 \leq z_1, x_2, x_4, x_6 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{L}_0)$

$$x_2^{(0)} = 1,\ x_6^{(0)} = 1,\ z_1^{(0)} = 1,\ x_4^{(0)} = \frac{6 - (2 + 1 + 2)}{3} = 1/3,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $6 + 1/3$, quindi superiore al valore $f(\hat{z})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{L}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{L}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $x_4 = 0$ e $x_4 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_2 + x_6 + z_1 + 2 \\ & 2x_2 + x_6 + 2z_1 \ \leq\ 6 \\ & z_1, x_2, x_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{L}_1)$$

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_2 + x_6 + z_1 + 3 \\ & 2x_2 + x_6 + 2z_1 \ \leq\ 3 \\ & z_1, z_2, x_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{L}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{L}_1), (\tilde{L}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{L}_1)$ che risulta essere espresso nelle tre sole variabili z_1, x_2, x_6. Ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $\hat{w} = (1,1,1)^T$ con $f(w) = 6 > f(\hat{z})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{L}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente, essendo quindi ora $\hat{z} = (0,1,0,0,1,1,0)^T$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{L}_2)$ che (con analogo conto) ammette soluzione rilassata data da $w = (1,1,0)^T$, con $f(w) = 6 = f(\hat{z})$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{L}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{z}$. Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha $z^* = \hat{z}$, ovvero ripassando alle variabili $x_1, \ldots, x_7$

$$x^* = (0,1,0,0,1,1,0)^T, \qquad f(x^*) = 6.$$

Esercizio 2

Si considerino le funzioni $\psi_1(x) = \sqrt{5}\ln[f(x)]$ e $\psi_2(x) = 2/\ln[f(x)]$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione lineare. Si dica (argomentandolo) se le funzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ risultano convesse/concave nell'intervallo aperto $(1, 100]$. Si dica anche se le medesime funzioni risultano convesse/concave nell'intervallo chiuso $[1, 100]$.

SOLUZIONE:

Essendo $f(x)$ una funzione lineare, di conseguenza sarà (in particolare) anche

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall \lambda \in [0,1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Essendo poi $\ln(y)$ una funzione concava in $(0, +\infty)$, sarà anche (per $f(x) > 0$ e $f(y) > 0$, $\lambda \in [0,1]$)

$$\sqrt{5}\ln\{f[\lambda x + (1-\lambda)y]\} = \sqrt{5}\ln\{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\} \geq \lambda\sqrt{5}\ln[f(x)] + (1-\lambda)\sqrt{5}\ln[f(y)],$$

ovvero $\psi_1(x)$ è una funzione *concava* per ogni $x \in (1, 100)$ (assumendo che $f(x) > 0$ e $f(y) > 0$).
Per quanto riguarda $\psi_2(x)$, basta osservare che quest'ultima (ove definita) è ottenuta partendo dalla funzione simmetrica di $\psi_1(x)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, e moltiplicando quest'ultima per $2/\sqrt{5}$. Pertanto $\psi_2(x)$ è *convessa* in $(1, 100)$ laddove $\psi_1(x)$ risulta concava.
Infine, sia $\psi_1(x)$ che $\psi_2(x)$ rimangono ben definite e (rispettivamente) concava/convessa anche in $[1, 100]$, purchè $f(x) > 0$, per ogni $x \in [1, 100]$ e $\ln[f(x)] \neq 0$.

Esercizio 3 (***)

Si vuole minimizzare i costi di consegna di due tipi di macchinari, dagli stabilimenti di produzione a quattro rivenditori diversi. È previsto un costo (Euro) di consegna diverso per ogni modello di macchinario e per ogni rivenditore, come riassunto nella seguente tabella:

Tipo macchinario	rivenditore 1	rivenditore 2	rivenditore 3	rivenditore 4
macchinario 1	110	115	115	145
macchinario 2	155	180	170	175

Le modalità con cui la consegna dei macchinari deve avvenire sono le seguenti:

- i macchinari del secondo tipo che vanno inviati al rivenditore 4 non possono eccedere la somma tra i macchinari del primo tipo inviati al rivenditore 2 e il doppio dei macchinari inviati al rivenditore 1;
- per ogni tipo di macchinario, se ad un rivenditore vengono inviati almeno 7 macchinari, va pagato (per quel rivenditore) un costo fisso aggiuntivo di 250 Euro;
- ad ogni rivenditore devono arrivare almeno 3 macchinari del tipo 1 e 4 macchinari del tipo 2;
- per ogni tipo di macchinario, al rivenditore 3 deve arrivare un numero di macchinari almeno pari ad 1/3 dei macchinari che arrivano al rivenditore 2;
- risulta necessario inviare almeno 50 macchinari del tipo 1 e 17 macchinari del tipo 2 ai rivenditori. In particolare, almeno 26 macchinari vanno inviati ai rivenditori 1 e 4.

Si formuli un modello di PL/PLI che fornisca la soluzione del problema di minimizzazione per la consegna dei macchinari ai rivenditori.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

y_{ij} = numero di macchinari di tipo i-simo inviati al rivenditore j-simo, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se si inviano almeno 7 macchinari di tipo } i\text{−simo al rivenditore } j = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad 110y_{11} + 115y_{12} + 115y_{13} + 145y_{14} + 155y_{21} + 180y_{22} + 170y_{23} + 175y_{24} + 250\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} z_{ij}$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
& y_{24} \leq y_{12} + 2\sum_{i=1}^{2} y_{i1} \\
& \sum_{j=1}^{4} y_{1j} \geq 50, \\
& \sum_{j=1}^{4} y_{2j} \geq 17, \\
& \sum_{i=1}^{2} (y_{i1} + y_{i4}) \geq 26, \\
& y_{i3} \geq \frac{1}{3} y_{i2}, \qquad i = 1,2 \\
& y_{1j} \geq 3, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& y_{2j} \geq 4, \qquad j = 1,2,3,4 \\
& z_{ij} \geq \frac{x_{ij} - 6}{M}, \qquad j = 1,2,3,4, \qquad M \gg 1 \\
& y_{ij} \geq 0,\ intera, \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

Dato il seguente sistema $\mathcal{P}$ di disequazioni nonlineari, dove a e b sono parametri reali, si dica per quali valori di a e b tale sistema rappresenta un poliedro in $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{P} \quad : \quad \begin{cases} x_1 + 4 - b\ln(x_2) + 2ax_2 \geq -2 \\ -1/(2a)x_1 - x_2 \geq 1/a \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + b^2(x_3)^3 \geq 0 \\ 5x_2 - 1 \leq 4. \end{cases}$$

Posto ora $b = 0$, si dica se $\mathcal{P}$ risulta un poliedro e si determinino se possibile i valori del parametro a affinchè $\mathcal{P}$ non ammetta vertici.

SOLUZIONE:

Essendo il poliedro, per definizione, l'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi, il sistema di disequazioni dato rappresenta senz'altro un poliedro se e solo se $b = 0$ (ovvero se e solo se si eliminano le nonlinearità introdotte dal *logaritmo* e dal *cubo*).

Si noti intanto che per $a = 0$ la seconda disequazione non risulta definita. Ora per $b = 0$, moltiplicando la seconda disequazione per $-2a$ ed imponendo $a < 0$, si ha che la seconda disequazione implica il soddisfacimento della prima, essendo

$$-2a\left(-\frac{x_1}{2a}\right) - 2a(-x_2) \geq -\frac{2a}{a} = -2.$$

Quindi, per $a < 0$ la prima disequazione è ridondante e può essere ignorata. Pertanto per $b = 0$ e $a < 0$ rimangono nel poliedro 3 disequazioni in 3 incognite. Affinchè quest'ultimo non ammetta vertici, essendo $n = 3$ ed $m = 3$, deve essere singolare la matrice dei coefficienti

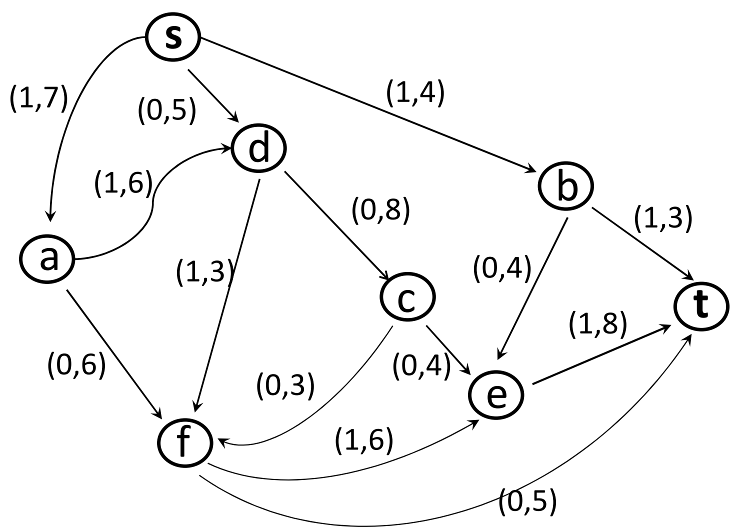
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2a} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima ammette sempre determinante NON nullo per $a < 0$. Pertanto il poliedro assegnato ammette sempre vertici per $b = 0$ ed $a < 0$.

Infine, per $b = 0$ ed $a > 0$, dopo facile verifica si nota che la matrice associata ai vincoli II, III e IV risulta non singolare, e ad essa è associato un punto di vertice. Quindi, anche per $b = 0$ ed $a > 0$ il poliedro ammette sempre vertici.

Esercizio 5 (***)

Sia dato il seguente grafo: (i) si dica se il grafo risulta orientato, (ii) verificare se il vettore di flusso corrente (nel grafo) è ammissibile, (iii) calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 't' indicando i cammini aumentanti identificati, (iv) indicare (se esiste) un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

(i) Si noti intanto che ogni arco è orientato, pertanto il grafo riulta orientato. (ii) Per ciascun nodo (esclusi la sorgente ed il pozzo) il flusso entrante coincide con quello uscente; inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Per quanto riguarda il punto (iii), il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 2.$$

Inoltre, è possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso indicati di seguito:

- $P_1 = \{s, b, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 4$
- $P_2 = \{s, b, e, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 5$
- $P_3 = \{s, a, f, t\}$, con $\delta^+ = 5$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 5$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 10$
- $P_4 = \{s, d, c, e, t\}$, con $\delta^+ = 4$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 4$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 14$
- $P_5 = \{s, d, f, e, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_5 = f_4 + \delta = 15$
- $P_6 = \{s, a, f, e, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_6 = f_5 + \delta = 16$.

Relativamente al punto (*iv*), un taglio a capacità minima è dato dalla seguente coppia di insiemi:

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{a, b, c, d, e, f, t\},$$

che dopo un immediato controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}) = 16.$$

Domanda Scritta 1 (***)

Si enunci il Teorema Fondamentale per la Programmazione Lineare, nel caso in cui il poliedro ammissibile NON sia in forma standard.

Domanda Scritta 2 (***)

Si introduca il problema del massimo flusso su grafo orientato, dandone un'esplicita formulazione mediante modello di Programmazione Lineare.

Domanda Scritta 3

Si enuncino e si dimostrino le condizioni (necessaria + sufficiente) affinchè il punto $y^* \in \mathbb{R}^n$ sia di minimo per il problema convesso $\min_{x \in C} f(x)$, dove $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, è convessa su C.