Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

9 giugno 2021: Esame in REMOTO

Regole per l'esame: la violazione comporta l'esclusione dello studente

- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- Ogni esercizio viene valutato con un **punteggio specifico**. La somma dei punteggi è pari a 32, per consentire l'assegnazione della eventuale *lode*.
- È necessario **numerare** e **scrivere** Nome-Cognome-Matricola su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente, prima di effettuarne la scansione ed il successivo invio al docente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo netto** per la prova è di **1h 40'** (escludendo il controllo documenti ed il tempo per lo snapshot della prima pagina delle soluzioni, durante la prova d'esame, da parte del docente)
- È **vietato** parlare durante la prova, avere vicino persone, usare testi/appunti/note/dispense.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dalla postazione di fronte al proprio PC/laptop, rimanendo nella visuale della fotocamera e con il microfono acceso.

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ **(6 punti)**

Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ed i punti $\bar{x} = (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 0)$, $\bar{y} = (\sqrt{\pi}/2, 0, \sqrt{\pi}/2)$, trovare un punto $z \in \mathbb{R}^3$ per il quale valga la relazione $f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f(z)^T (\bar{y} - \bar{x})$.

SOLUZIONE:

Basta notare che $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pertanto per il Teorema del Valor Medio esiste un valore $\theta \in [0, 1]$ tale che

$$f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f[\bar{x} + \theta(\bar{y} - \bar{x})]^T (\bar{y} - \bar{x}).$$

Essendo poi

$$f(\bar{y}) = \tfrac{\pi}{4} + 0 + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}$$

$$f(\bar{x}) = \pi + \pi + 0 = 2\pi,$$

si avrà anche

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi + \left.\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}^T\right|_{z=\bar{x}+\theta(\bar{y}-\bar{x})} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \\ -\sqrt{\pi} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

che dopo aver svolto i calcoli (i.e. il prodotto scalare) fornisce l'equazione $7 = 14\theta$, ovvero $\theta = 1/2$.

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ **(6 punti)**

L'università di Hogwarts deve erogare l'appello di magia comparata a 100 studenti, avendo a disposizione 5 aule, ciascuna di capienza massima pari a 25 studenti. Ciascuno studente viene numerato usando i numeri progressivi $1, 2, \ldots, 100$. Il costo di assegnazione dello studente i-simo ($i = 1, \ldots, 100$) all'aula j-sima ($j = 1, \ldots, 5$) è pari a $c_{i,j} \geq 0$ Euro. Inoltre per ciascuna delle aule che non vengono completamente riempite è necessario pagare un costo aggiuntivo, pari a p Euro.

Tutti gli studenti devono essere assegnati ad una ed una sola aula. Ad ogni aula possono essere assegnati al più 20 studenti cui corrisponde un numero pari. Similmente, ad ogni aula possono essere assegnati al più 20 studenti cui corrisponde un numero dispari.

Si formuli un pmodello di PL/PLI per la minimizzazione dei costi complessivi di assegnazione degli studenti alle aule.

<u>**SOLUZIONE:**</u>

Scelta variabili:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } i\text{−simo viene assegnato all'aula } j\text{−sima,} \\ & i = 1, \ldots, 100, \quad j = 1, \ldots, 5 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'aula } j\text{−sima e' riempita con meno di 25 studenti,} \\ & j = 1, \ldots, 5, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{5} c_{i,j} x_{i,j} + p \sum_{j=1}^{5} y_j$$

Vincoli:

$$\sum_{j=1}^{5} x_{i,j} = 1, \qquad i = 1, \ldots, 100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_{i,j} \leq 25, \qquad j = 1, \ldots, 5$$

$$y_j \geq \frac{25 - \sum_{i=1}^{100} x_{i,j}}{M}, \qquad j = 1, \ldots, 5, \quad M \gg 1,$$

$$\sum_{k=1}^{50} x_{2k,j} \leq 20 \qquad j = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{k=1}^{50} x_{2k-1,j} \leq 20 \qquad j = 1, \ldots, 5$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ **(6 punti)**

Sia dato il parametro $a \in \mathbb{R}$ ed il seguente poliedro in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ ax_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 0 \\ 3x_4 \geq 0 \\ x_2 - x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Trovare tutti e soli i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali il poliedro ammette 1 solo vertice.

SOLUZIONE:

Tutti i vincoli sono associati a funzioni lineari/affini, pertanto ciascuno dei vincoli identifica un iperpiano o un semispazio. Di conseguenza, essendo tali vincoli anche in numero finito, la loro intersezione sarà un poliedro, e di conseguenza anche un insieme convesso.

Tale poliedro può contenere al massimo un numero di vertici pari al numero di quaterne (quattro variabili) di vincoli. Di conseguenza tale numero sarà dato da

$$\frac{5!}{4!(5-4)!} = 5.$$

Ora verifichiamo se ciascuna delle 5 quaterne di vincoli può dar luogo ad un vertice.

(I): escludendo l'ultimo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 12a \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Pertanto, essendo il determinante associato alle prime 4 relazioni non singolare per $a \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche l'ultima relazione. Quindi, per $a \neq 0$ l'origine è un vertice.

(II): escludendo il penultimo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = a \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Pertanto, essendo il determinante associato alle relazioni (esclusa la penultima) non singolare per $a \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche la penultima relazione. Quindi, di nuovo per $a \neq 0$ l'origine è un vertice.

(III): escludendo ora il terzultimo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -6a \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Quindi, essendo il determinante associato alle relazioni (esclusa la terzultima) non singolare per $a \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche la terzultima relazione. Pertanto, di nuovo per $a \neq 0$ l'origine è un vertice.

(IV): escludendo ora il secondo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto da questo sottocaso, per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$ non possono essere generati vertici.

(V): escludendo ora il primo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 15a \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Pertanto, essendo il determinante associato alle relazioni (esclusa la prima) non singolare per $a \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche la prima relazione. Quindi, di nuovo per $a \neq 0$ l'origine è un vertice.

Domanda Scritta 1 **(7 punti)**

Si dimostri che la derivata direzionale della funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continuamente differenziabile in $\mathbb{R}^n$, nel punto $\bar{x}$, lungo la direzione $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, è data da

$$\nabla f(\bar{x})^T d.$$

Domanda Scritta 2 **(7 punti)**

Data la funzione strettamente concava $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si dimostri che tutti gli insiemi dei livello della funzione $-g(x)$ sono insiemi convessi.