Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

9 settembre 2021

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (5 Novembre 2020) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di **2h**
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1

Due tipi di minerali vengono prodotti in tre diverse miniere estrattive: è necessario pianificare il trasporto dei minerali dalle miniere, in modo tale da soddisfare alcune specifiche e minimizzare i costi di trasporto. Tra le specifiche relative al trasporto dei minerali si ha che:

- il minerale di tipo 2 non viene trasportato dalla seconda miniera;
- la somma (in peso) dei minerali trasportati da ciascuna miniera non può eccedere il doppio del peso di ciascun minerale trasportato dalla miniera stessa;
- il minerale di tipo 1 complessivamente trasportato dalle miniere 2 e 3 non può superare il totale del minerale 2 trasportato dalle miniere 1 e 2;
- da ogni miniera vengono trasportate almeno 7 tonnellate di minerali;
- per ogni tipo di minerale, dalla miniera 1 deve essere trasportata una quantità di minerale almeno pari ad 1/4 di quel minerale trasportato da ciascuna delle miniere 2 e 3;
- complessivamente devono essere trasportate 1100 tonnellate di minerale;
- se da ciascuna miniera vengono trasportate più di 35 tonnellate, è necessario pagare un costo aggiuntivo pari a 1000 Dollari.

È noto inoltre che il costo di trasporto (dollari/tonnellata) di ciascun minerale dipende dalla miniera considerata, ed è riassunto come segue:

	miniera 1	miniera 2	miniera 3
Costo trasporto per tonnellata di minerale 1	30	42	44
Costo trasporto per tonnellata di minerale 2	27	36	41

Si formuli un modello di PL/PLI per la soluzione del problema di trasporto dei minerali dalle miniere.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y_{ij} = \text{tonnellate di minerale di tipo } i\text{-simo trasportate dalla miniera } j\text{-sima, } i = 1,2,\ j = 1,2,3$$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{se si trasportano piu}' \text{ di 35 tonnellate di minerale dalla miniera } j = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad 30y_{11} + 42y_{12} + 44y_{13} + 27y_{21} + 36y_{22} + 41y_{23} + 1000\sum_{j=1}^{3} w_j$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&y_{22} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{2} y_{ij} \leq 2y_{1j}, \qquad j = 1,2,3 \\
&\sum_{i=1}^{2} y_{ij} \leq 2y_{2j}, \qquad j = 1,2,3 \\
&y_{12} + y_{13} \leq y_{21} + y_{22} \\
&y_{1j} + y_{2j} \geq 7, \qquad j = 1,2,3 \\
&y_{i1} \geq 1/4 y_{i2}, \qquad i = 1,2 \\
&y_{i1} \geq 1/4 y_{i3}, \qquad i = 1,2 \\
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_{ij} = 1100 \\
&w_j \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{2} y_{ij}\right) - 35}{M}, \qquad j = 1,2,3, \qquad M \gg 1 \\
&y_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Esercizio 2}}$

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia f lineare. Si dica (dimostrandolo) se:

- la funzione $-f(x)$ è concava su $\mathbb{R}^n$;
- la funzione $4|f(x)|$ è convessa su $\mathbb{R}^n$.

SOLUZIONE:

Essendo $f(x)$ lineare, allora anche la funzione $-f(x)$ risulterà lineare, e pertanto anche concava su $\mathbb{R}^n$.
Si noti poi che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} 4|f[\alpha x + (1-\alpha)y]| &= 4|f(\alpha x) + f[(1-\alpha)y]| = \\ &\leq 4|\alpha f(x)| + 4|(1-\alpha)f(y)| = \alpha 4|f(x)| + (1-\alpha)4|f(y)|. \end{aligned}$$

Pertanto la funzione $4|f(x)|$ risulta convessa su $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\textbf{Esercizio 3}}$

Si consideri il seguente poliedro in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli il numero massimo (possibile) di vertici. Inoltre, si calcolino (se esistono) tali vertici.

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 \leq 1 \\ 4x_3 \leq -2 \\ x_3 + x_4 \geq +1 \\ x_3 - 2x_4 \leq 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 3$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Consideriamo pertanto i seguenti 4 casi:

(I) escludiamo il primo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_3 = -2 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che risulta essere incompatibile e quindi NON fornisce nessun possibile punto di vertice.

(II) escludiamo il secondo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

che però non soddisfa il secondo vincolo. Quindi P_1 NON può essere un vertice del poliedro.

(III) escludiamo il terzo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 1 \\ 4x_3 = -2 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

che però non soddisfa il terzo vincolo. Quindi P_2 NON può essere un vertice del poliedro.

(IV) escludiamo il quarto vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 1 \\ 4x_3 = -2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

il quale soddisfa senz'altro il quarto vincolo. Inoltre si ha per il determinante dei vincoli attivi in P_3

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_3 rappresenta l'unico vertice del poliedro assegnato.

Domanda Scritta 1

Si descriva il problema del massimo flusso su grafi orientati, e se ne dia una formulazione in termini di Programmazione Lineare.

Domanda Scritta 2

Si enunci il Teorema Fondamentale della PL. Si distinguano i casi nei quali l'insieme ammissibile sia un poliedro generale e sia un poliedro in forma standard, rispettivamente.