Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

10 febbraio 2023

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (09 Novembre 2022) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 30'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 55'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Un'impresa che vende cuscinetti a sfere d'acciai produce sfere di 4 diametri diversi, usando indifferentemente 3 macchinari distinti. È noto che se si producono le sfere con diametro di tipo 2 sul secondo macchinario, allora si avrà un costo fisso di 1000 Euro, da aggiungere ai costi variabili delle sfere. In particolare, il costo variabile delle sfere di ciascun diametro è rispettivamente dato da:

Tipologia di sfere	Costo/Kg
Sfere di diametro 1	4.1 Euro/Kg
Sfere di diametro 2	4.5 Euro/Kg
Sfere di diametro 3	4.7 Euro/Kg
Sfere di diametro 4	5.5 Euro/Kg

Inoltre:

- il peso complessivo (tra tutti i macchinari) delle sfere di diametro 3 prodotte, non può essere inferiore al peso delle sfere di diametro 4 prodotte usando i macchinari 1 e 2;
- le sfere di diametro 2 non possono essere prodotte sul macchinario 2, per incompatibilità con gli utensili di quest'ultimo;
- il totale (in Kg) di sfere prodotte con i macchinari 1 e 3 deve essere compreso tra la quantità di sfere prodotte sul macchinario 2 ed il triplo di quest'ultima;
- da indagini di mercato risulta che sia necessario produrre almeno 1000 Kg di sfere, ma non più di 1500 Kg delle medesime. Inoltre, le sfere con diametro 4 vanno prodotte in quantità almeno pari a 300 Kg.

Si formuli un modello di PL/PLI per la minimizzazione dei costi di produzione delle sfere, in base al quale si possano determinare la quantità (in Kg) dei 4 tipi di sfere, prodotte su ciascun macchinario.
SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se si producono sfere di tipo 2 sul macchinario di tipo 2} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \text{Kg di sfere di tipo } i\text{-simo prodotte sul macchinario } j\text{-simo } (i = 1, \dots, 4;\ j = 1, 2, 3)$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{3} (4.1x_{1j} + 4.5x_{2j} + 4.7x_{3j} + 5.5x_{4j}) + 1000y$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{3} x_{3j} \geq x_{41} + x_{42},\\
&x_{22} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{4} x_{i2} \leq \sum_{i=1}^{4} x_{i1} + \sum_{i=1}^{4} x_{i3} \leq 3 \sum_{i=1}^{4} x_{i2},\\
&1000 \leq \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1500,\\
&\sum_{j=1}^{3} x_{4j} \geq 300,\\
&y \geq \frac{x_{22}}{M}, \qquad M \gg 1,\\
&x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, essendo $f(x) = h(x) + 5$ e $h(x)$ funzione lineare. Siano dati gli insiemi $\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; -10 \leq f(x) < 10\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; -2 < f(x) \leq 10\}$. Si dimostri che l'insieme $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2\}$ è convesso. Inoltre si dica se tale insieme risulta sempre essere un politopo.

SOLUZIONE:

L'insieme $\mathcal{C}_1$ può essere riscritto come $\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; -15 \leq h(x) < +5\}$. Quindi, dal momento che $\mathcal{C}_1$ risulta l'intersezione dei due insiemi di livello (convessi) $\bar{\mathcal{C}}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; h(x) < +5\}$ e $\hat{\mathcal{C}}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; -h(x) \leq +15\}$ (dove entrambe $h(x)$ e $-h(x)$ risultano lineari e quindi convesse), allora $\mathcal{C}_1$ risulta senz'altro convesso.

Infine, si noti che $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2\} \equiv \mathcal{C}_1$. Pertanto anche $\mathcal{C}$ risulta convesso. Sulla base delle sole informazioni note, essendo $h(x)$ lineare allora $\mathcal{C}$ sarà un poliedro, ma non vi è certezza che tale insieme sia anche un politopo.

Esercizio 3 (***)

Usando il metodo del Branch & Bound si risolva il seguente esercizio di Knapsack binario.

$$\begin{array}{ll} \max & 3y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 \\ & y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 + y_5 + y_6 - 1.2 \ \le \ 0 \\ & y \in \{0,1\}^6. \end{array} \qquad (J_0)$$

SOLUZIONE:

In (J_0) possiamo senz'altro assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $y_2 = 1 - x_2$, $y_4^* = 1$ and $x_6^* = 0$), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & 3y_1 + x_2 + y_3 + 2y_5 \\ & y_1 + 2x_2 + 3y_3 + y_5 \ \le \ 4.2 \\ & y_1, x_2, y_3, y_5 \in \{0,1\}. \end{array} \qquad (\tilde{K}_0)$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione intera corrente $\hat{y} = 0$, con $f(\hat{y}) = 0$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{J}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{J}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo non decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili (y_1, x_2, y_3 e y_5), i.e.

$$\frac{3}{1} \ \ge \ \frac{2}{1} \ \ge \ \frac{1}{2} \ \ge \ \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{array}{ll} \max & 3y_1 + 2y_5 + x_2 + y_3 \\ & y_1 + y_5 + 2x_2 + 3y_3 \ \le \ 4.2, \\ & 0 \le y_1, x_2, y_3, y_5 \le 1. \end{array}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{J}_0)$

$$y_1^{(0)} = 1, \ y_5^{(0)} = 1, \ x_2^{(0)} = 1, \ y_3^{(0)} = \frac{4.2 - (1+1+2)}{3} = 1/15,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo superiore al valore $f(\hat{y})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{J}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{J}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $y_3 = 0$ e $y_3 = 1$)

$$\begin{array}{ll} \max & 3y_1 + 2y_5 + x_2 \\ & y_1 + y_5 + 2x_2 \ \le \ 4.2 \\ & y_1, x_2, y_5 \in \{0,1\}, \end{array} \qquad (\tilde{J}_1)$$

$$\begin{array}{ll} \max & 3y_1 + 2y_5 + x_2 + 1 \\ & y_1 + y_5 + 2x_2 \ \le \ 1.2 \\ & y_1, x_2, y_5 \in \{0,1\}, \end{array} \qquad (\tilde{J}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{J}_1), (\tilde{J}_2)\}$. Estraiamo il primo problema che ammette la soluzione rilassata (coincidente con una soluzione intera) $y^{(1)} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$ con $f(x^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{J}_1)$ ed aggiorniamo $\hat{y} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$, con $f(\hat{y}) = 6$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{J}_2)$ che ammette soluzione rilassata data da $y^{(2)} = (1\ 1\ 1\ 1\ 0.2\ 0)^T$, con $f(y^{(2)}) = 4.4 < 6$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{J}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{y}$. Per la soluzione finale si ha

$$y^* = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T.$$

$\boxed{\text{Domanda Scritta 1}}$

Date le matrici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, i vettori $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^p$, nonchè l'insieme $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b, \; Bx = c\}$, dimostrare esplicitamente (i.e. applicando la definizione di convessità) che l'insieme $\mathcal{A}$ è convesso.

$\boxed{\text{Domanda Scritta 2}}$ (***)

Si descriva il problema del Massimo Flusso su Grafo Orientato, se ne dia una formulazione con un modello di Programmazione Lineare e si indichino le proprietà di quest'ultimo.

$\boxed{\text{Domanda Scritta 3}}$ (***)

Sia dato un poliedro $\mathcal{P}$ non vuoto in $\mathbb{R}^n$, e siano v_1, v_2 vertici di $\mathcal{P}$. Si dica se i punti nella combinazione convessa di tali vertici risultano a loro volta vertici di $\mathcal{P}$, e si diano esempi grafici delle conclusioni.