Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

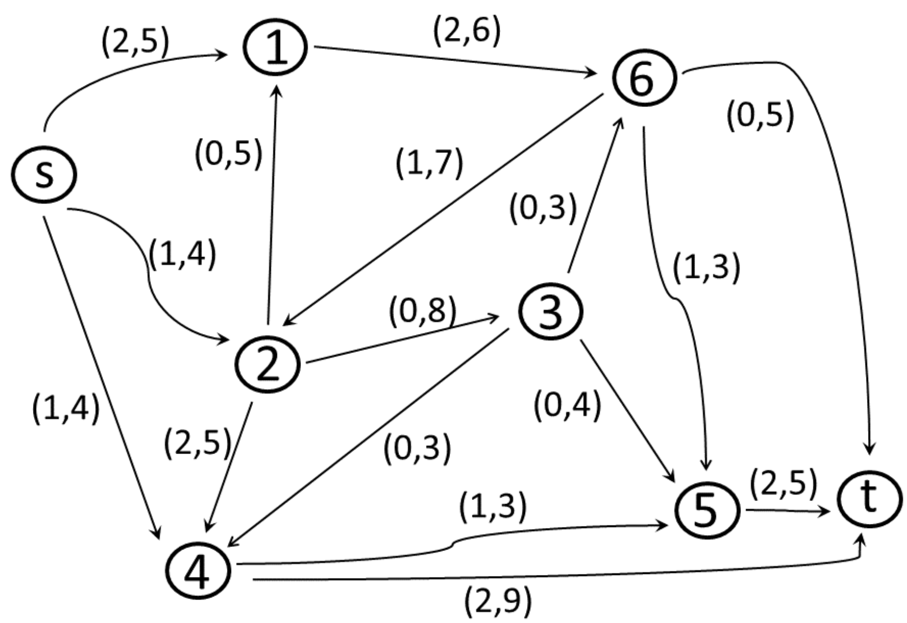
13 gennaio 2021: Esame in REMOTO

Regole per l'esame: la violazione comporta l'esclusione dello studente

- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- Ogni esercizio viene valutato con un **punteggio specifico**. La somma dei punteggi è pari a 32, per consentire l'assegnazione della eventuale *lode*.
- È necessario **numerare** e **scrivere** Nome-Cognome-Matricola su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente, prima di effettuarne la scansione ed il successivo invio al docente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo netto** per la prova è di **1h 25'** (escludendo il controllo documenti ed il tempo per lo snapshot della prima pagina delle soluzioni, durante la prova d'esame, da parte del docente)
- È **vietato** parlare durante la prova, avere vicino persone, usare testi/appunti/note/dispense.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dalla postazione di fronte al proprio PC/laptop, rimanendo nella visuale della fotocamera e con il microfono acceso.

Esercizio 1 **(6 punti)**

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

In ciascun nodo esclusi $\{s,t\}$ è soddisfatto il vincolo di conservazione, inoltre lungo ciascun arco è soddisfatto anche il relativo vincolo di capacità. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile. Il valore del flusso iniziale è (flusso iniziale uscente da s)

$$F_0 = 4.$$

Alcuni possibili cammini aumentanti, con i relativi valori della variazione del flusso δ apportati, sono elencati di seguito:

- $P_1 = \{s, 1, 6, t\}$, con $\delta = \min\{5-2, 6-2, 5-0\} = 3$, da cui $F_1 = F_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, 2, 3, 5, t\}$, con $\delta = \min\{3, 8, 4, 3\} = 3$, da cui $F_2 = F_1 + \delta = 10$
- $P_3 = \{s, 4, t\}$, con $\delta = \min\{3, 7\} = 3$, da cui $F_3 = F_2 + \delta = 13$

Inoltre, non è più possibile calcolare ulteriori cammini aumentanti ed è facile verificare che il seguente taglio è a capacità minima:

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, t\}.$$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ **(7 punti)**

L'attuale governo in carica potrebbe essere sfiduciato, richiedendo un'imminente tornata di votazioni. Allo scopo, nella provincia di Bellaluce devono essere predisposti esattamente 7 seggi (urne) elettorali in 5 città diverse. In ogni città ci deve essere almeno un'urna. Inoltre, ogni urna deve essere assegnata ad una ed una sola città e l'assegnazione prevede un costo di allestimento del seggio. In particolare, il costo di allestimento dell'urna i-sima nella città j-sima è pari a $c_{ij} > 0$. Il numero di elettori in ciascuna delle 5 città è pari (rispettivamente) a 824, 1430, 450, 567, 1324.

Descrivere un modello di PL/PLI, per l'assegnazione degli elettori ai seggi distribuiti nelle 5 città, nel quale una variabile rappresenti il numero di elettori assegnati a ciascun seggio. L'obiettivo del modello è quello di trovare una distribuzione dei seggi che minimizzi al contempo il massimo numero di elettori assegnati ad uno stesso seggio ed i costi di allestimento dei seggi.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$t = \text{variabile di supporto da minimizzare}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il seggio } i-\text{simo viene assegnato alla citta}' \ j-\text{sima}, \\ & i = 1, \dots, 7, \quad j = 1, \dots, 5 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \text{numero di abitanti presenti nella citta' } j\text{-sima ed assegnati al seggio } i\text{-simo}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \qquad t + \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{7} x_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \dots, 5, \\
&\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 7, \\
&y_{ij} \leq t, \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 1, \dots, 7, \\
&\sum_{i=1}^{7} y_{i1} = 824, \\
&\sum_{i=1}^{7} y_{i2} = 1430, \\
&\sum_{i=1}^{7} y_{i3} = 450, \\
&\sum_{i=1}^{7} y_{i4} = 567, \\
&\sum_{i=1}^{7} y_{i5} = 1324, \\
&x_{ij} \geq \frac{y_{ij}}{M}, \quad i = 1, \dots, 7, \quad j = 1, \dots, 5, \quad M \gg 1, \\
&y_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7, \quad j = 1, \dots, 5, \\
&t \geq 0, \\
&x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 7, \quad j = 1, \dots, 5,
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ **(5 punti)**

Siano date le seguenti uguaglianze/disuguaglianze in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} -3 + 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Dire (motivandolo) se tali uguaglianze/disuguaglianze identificano un *poliedro*. In caso di risposta affermativa, trovare prima il massimo numero di vertici per tale poliedro e poi determinare i vertici stessi (qualora ve ne siano).

SOLUZIONE:

Dal momento che tutte le uguaglianze/disuguaglianze sono associate a funzioni lineari/affini, allora l'intersezione dei tre vincoli rappresenta un'intersezione finita di iperpiani e semispazi, pertanto è un poliedro. Inoltre, tale poliedro può contenere al massimo un numero di vertici pari al numero di terne (tre variabili) di vincoli. Pertanto tale numero sarà banalmente pari a

$$\frac{3!}{3!(3-3)!} = 1.$$

Affinchè l'unico possibile punto di vertice P lo sia davvero, devono verificarsi le seguenti condizioni:

- P soddisfa il sistema di equazioni/disequazioni,
- esistono in P almeno 3 vincoli del sistema attivi,
- il numero di vincoli attivi in P che risultano anche linearmente indipendenti deve essere esattamente uguale a 3.

Pertanto isoliamo ora l'unica possibile terna di vincoli associate al sistema di equazioni/disequazioni assegnate. Trasformando le relazioni in equazioni si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

che presenta determinante pari a $+1 \neq 0$, nonchè la soluzione $P = (0 \quad -8 \quad +8)$. Pertanto il punto $(0 \quad -8 \quad +8)$ è l'unico vertice del poliedro assegnato.

Domanda Scritta 1 **(4 punti)**

Si definiscano le caratteristiche di un problema di Programmazione Lineare (PL) in forma *standard*. Poi si enunci il Teorema Fondamentale della PL per problemi di PL in forma standard.

Domanda Scritta 2 **(5 punti)**

Data la funzione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, definire prima la sua derivata direzionale $D(h, v)$ nel punto $\bar{x}$, lungo la direzione $v \in \mathbb{R}^n$. Successivamente si dimostri che

$$D(h, v) = \nabla h(\bar{x})^T v.$$

Domanda Scritta 3 **(5 punti)**

Data la funzione concava $f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dimostrare esplicitamente che gli insiemi di livello della funzione $g(x) = -f(x)$ sono convessi.