Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

16 gennaio 2023

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (09 Novembre 2022) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 30'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 05'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

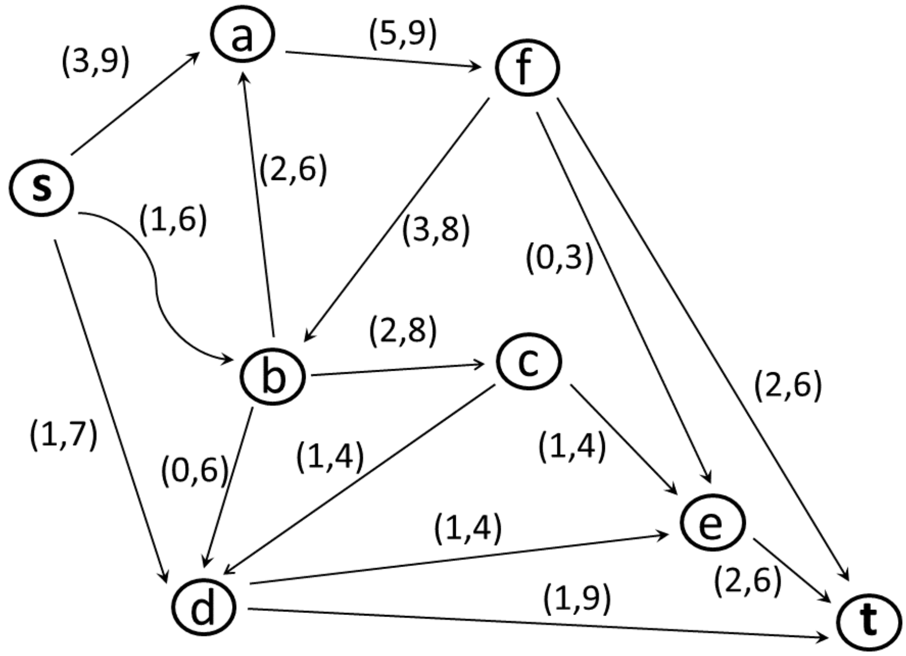
Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

In ciascun nodo esclusi $\{s, t\}$ è soddisfatto il vincolo di conservazione, inoltre lungo ciascun arco è soddisfatto anche il relativo vincolo di capacità. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile. Il valore del flusso iniziale è (flusso iniziale uscente da s)

$$F_0 = 5.$$

Alcuni possibili cammini aumentanti, con i relativi valori della variazione del flusso δ apportati, sono elencati di seguito:

- $P_1 = \{s, a, f, t\}$, con $\delta = \min\{9-3, 9-5, 6-2\} = 4$, da cui $F_1 = F_0 + \delta = 9$
- $P_2 = \{s, d, t\}$, con $\delta = \min\{7-1, 9-1\} = 6$, da cui $F_2 = F_1 + \delta = 15$
- $P_3 = \{s, b, c, e, t\}$, con $\delta = \min\{6-1, 8-2, 4-1, 6-2\} = 3$, da cui $F_3 = F_2 + \delta = 18$
- $P_4 = \{s, b, d, t\}$, con $\delta = \min\{6-4, 6-0, 9-7\} = 2$, da cui $F_4 = F_3 + \delta = 20$
- $P_5 = \{s, a, b, f, e, t\}$, con $\delta = \min\{9-7, 2, 3, 3-0, 6-5\} = 1$, da cui $F_5 = F_4 + \delta = 21$

Inoltre, non è più possibile calcolare ulteriori cammini aumentanti ed è facile verificare che il seguente taglio è a capacità minima:

$$W = \{s, a, b, c, d, e, f\}, \qquad \bar{W} = \{t\}.$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$, ed i punti di $\mathbb{R}^3$ $\bar{x} = (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 0)$, $\bar{y} = (\sqrt{\pi}/2, 0, \sqrt{\pi}/2)$. Si dica se esiste e (eventualmente) si trovi un punto $\bar{z} \in \mathbb{R}^3$ per il quale valga la relazione $f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{z})^T(\bar{y} - \bar{x})$.

SOLUZIONE:

Basta notare che $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pertanto per il Teorema del Valor Medio esiste un valore $\theta \in [0,1]$ tale che

$$f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f[\bar{x} + \theta(\bar{y} - \bar{x})]^T (\bar{y} - \bar{x}) = f(\bar{x}) + \nabla f[\bar{z}]^T (\bar{y} - \bar{x}).$$

Essendo poi

$$f(\bar{y}) = \tfrac{\pi}{4} + 0 + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}$$

$$f(\bar{x}) = \pi + \pi + 0 = 2\pi,$$

si avrà anche

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi + \left. \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}^T \right|_{z=\bar{x}+\theta(\bar{y}-\bar{x})} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \\ -\sqrt{\pi} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

che dopo aver svolto i calcoli (i.e. il prodotto scalare) fornisce l'equazione $7 = 14\theta$, ovvero $\theta = 1/2$.

Esercizio 3 (***)

Si determini in $\mathbb{R}^3$ il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq -1 \\ 4z_2 \leq -2 \\ z_2 + z_3 \geq +1 \\ z_2 - 2z_3 \leq 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 3$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Consideriamo pertanto i seguenti 4 casi:

(I) escludiamo il primo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 4z_2 = -2 \\ z_2 + z_3 = 1 \\ z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases}$$

che risulta essere incompatibile e quindi NON fornisce nessun possibile punto di vertice.

(II) escludiamo il secondo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_2 + z_3 = 1 \\ z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

che però non soddisfa il secondo vincolo. Quindi P_1 NON può essere un vertice del poliedro.

(III) escludiamo il terzo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ 4z_2 = -2 \\ z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

che però non soddisfa il terzo vincolo. Quindi P_2 NON può essere un vertice del poliedro.

(IV) escludiamo il quarto vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ 4z_2 = -2 \\ z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

il quale soddisfa senz'altro il quarto vincolo. Inoltre si ha per il determinante dei vincoli attivi in P_3

$$\begin{vmatrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +4 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_3 *rappresenta l'unico vertice del poliedro assegnato*.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 1}}$

Si dimostri che dato il problema $\min_{x \in C} f(x)$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f(x)$ *strettamente convessa* su C, allora se x^* è un punto di minimo per $f(x)$ su C sarà anche l'unico punto di minimo.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 2}}$ (***)

Si descriva il Metodo del Branch & Bound, specificando a quale problema viene applicato e quali sono i passi (analitici) che prevede.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 3}}$ (***)

Si enunci il Teorema Fondamentale della PL particolarizzandolo a problemi in cui è noto che il poliedro ammissibile si trova confinato nel II ortante di $\mathbb{R}^n$.