Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

17 Gennaio 2025

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (Novembre 2024) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 15'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 40'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

A Padova l'università deve erogare l'appello di Fisica Teorica a 82 studenti. Per tale appello sono disponibili 4 aule ($j = 1, \ldots, 4$), ognuna delle quali ha capienza massima pari a 36 studenti. Gli studenti vengono numerati progressivamente ($i = 1, \ldots, 82$). Sia poi $d_{i,j} \geq 0$ il costo di assegnazione dello studente i-simo all'aula j-sima. Per ciascuna delle aule che non vengono completamente riempite è necessario pagare un costo aggiuntivo, pari a PP Euro.

Tutti gli studenti devono essere assegnati ad una ed una sola aula. Inoltre, in ogni aula possono esserci al più 26 studenti cui corrisponde un numero pari. Similmente, in ogni aula possono esserci al più 24 studenti cui corrisponde un numero dispari.

Si formuli un modello di PL/PLI per la minimizzazione dei costi complessivi di assegnazione degli studenti alle aule.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } i\text{-simo viene assegnato all'aula } j\text{-sima}, \\ & i = 1, \ldots, 82, \quad j = 1, \ldots, 4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'aula } j\text{-sima e' riempita con meno di 36 studenti}, \\ & j = 1, \ldots, 4, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{82} \sum_{j=1}^{4} d_{i,j} x_{i,j} + PP \sum_{j=1}^{4} y_j$$

Vincoli:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{i,j} = 1, \qquad i = 1, \ldots, 82$$

$$\sum_{i=1}^{82} x_{i,j} \leq 36, \qquad j = 1, \ldots, 4$$

$$y_j \geq \frac{36 - \sum_{i=1}^{82} x_{i,j}}{M}, \qquad j = 1, \ldots, 4, \quad M \gg 1,$$

$$\sum_{k=1}^{41} x_{2k,j} \leq 26 \qquad j = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{k=0}^{40} x_{2k+1,j} \leq 24 \qquad j = 1, \ldots, 4$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $f(x) = c(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)/3$, e si considerino i punti $\bar{x} = (0,0,0)$, $\bar{y} = (1,1,a)$, dove $a, c \in \mathbb{R}$. Si dica (motivandolo) se esiste un punto $z \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f(z)^T(\bar{y} - \bar{x})$. Si trovi tale punto z in funzione dei parametri a, c. Si dica infine se esistono valori di c per i quali $z = (1 \;\; 1 \;\; a)^T/\sqrt{3}$.

SOLUZIONE:
Esiste senz'altro il punto $z \in \mathbb{R}^3$ in quanto la funzione soddisfa $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, quindi per il Teorema del Valor Medio (I ordine) esiste il (almeno uno) punto z, con $z \in [\bar{x}, \bar{y}]$.

Abbiamo poi dal Teorema del Valor Medio che, posto $z = \bar{x} + \theta(\bar{y} - \bar{x})$, con $\theta \in [0,1]$, e ricordando che $f(\bar{x}) = f(0,0,0) = 0$,

$$f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f(z)^T(\bar{y} - \bar{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c(1^3 + 1^3 + a^3)}{3} = 0 + c \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ a-0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\frac{c(2 + a^3)}{3} = c\theta^2(1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 + a^2 \cdot a)$$

fornisce la soluzione $\theta = 1/\sqrt{3}$. Pertanto il punto z sarà dato da

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Infine, si noti che quest'ultimo vettore è indipendente dal parametro 'c', pertanto per *qualsiasi valore* di 'c' si otterrà il vettore z asssegnato.

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ (***)

Sia dato il parametro $c \in \mathbb{R}$ ed il seguente poliedro in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ cx_3 - x_4 + x_2 = 0 \\ 2x_4 + 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ 3x_2 \geq 0 \\ x_4 - x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Trovare tutti e soli i valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ per i quali il poliedro ammette 1 solo vertice.

SOLUZIONE:

Tutti i vincoli sono associati a funzioni lineari/affini, pertanto ciascuno dei vincoli identifica un iperpiano o un semispazio. Di conseguenza, essendo tali vincoli anche in numero finito, la loro intersezione sarà un poliedro, e di conseguenza anche un insieme convesso.

Tale poliedro può contenere al massimo un numero di vertici pari al numero di quaterne (quattro variabili) di vincoli. Di conseguenza tale numero sarà dato da

$$\frac{5!}{4!(5-4)!} = 5.$$

Ora verifichiamo se ciascuna delle 5 quaterne di vincoli può dar luogo ad un vertice.

(I): escludendo l'ultimo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 12c \neq 0 \iff c \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Pertanto, essendo il determinante associato alle prime 4 relazioni non singolare per $c \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche l'ultima relazione. Quindi, per $c \neq 0$ l'origine è un vertice.

(II): escludendo il penultimo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -c \neq 0 \iff c \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Pertanto, essendo il determinante associato alle relazioni (esclusa la penultima) non singolare per $c \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche la penultima relazione. Quindi, di nuovo per $c \neq 0$ l'origine è un vertice.

(III): escludendo ora il terzultimo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -6c \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Quindi, essendo il determinante associato alle relazioni (esclusa la terzultima) non singolare per $c \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche la terzultima relazione. Pertanto, di nuovo per $c \neq 0$ l'origine è un vertice.

(IV): escludendo ora il secondo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto da questo sottocaso, per qualsiasi valore di $c \in \mathbb{R}$ non possono essere generati vertici.

(V): escludendo ora il primo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, il determinante associato ai restanti vincoli (supposti attivi) è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & c & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 15c \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c \neq 0.$$

Inoltre i termini noti delle equazioni/disequazioni del sistema originale sono tutti nulli. Pertanto, essendo il determinante associato alle relazioni (esclusa la prima) non singolare per $c \neq 0$, gli corrisponde il punto di origine, che soddisfa anche la prima relazione. Quindi, di nuovo per $c \neq 0$ l'origine è un vertice.

Domanda Scritta 1 (***)

Si descriva il metodo del Branch & Bound per la soluzione di problemi di Programmazione Lineare mista.

Domanda Scritta 2 (***)

Si enunci il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare, analizzando sia il caso di poliedro ammissibile generico, sia il caso di poliedro ammissibile in Forma Standard. Si dica infine (motivandolo) se un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ può contenere rette.

Domanda Scritta 3

Date le funzioni concave $f(x)$ e $g(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *dimostrare esplicitamente* che gli insiemi di livello della funzione $h(x) = -[2f(x) + 3g(x)]$ sono convessi.