Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

19 giugno 2020: Esame in REMOTO

Regole per l'esame: la violazione comporta l'esclusione dello studente

- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente, prima di effettuarne la scansione ed il successivo invio al docente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario **indicare sul primo foglio** se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2019) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 15'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 45'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova, avere vicino persone, usare testi/appunti/note/dispense.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dalla postazione di fronte al proprio PC/laptop, rimanendo nella visuale della fotocamera e con il microfono acceso.

Esercizio 1 (***)

Dato il problema di Knapsack binario

$$\begin{array}{l} \min\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \ \leq\ 5 \\ \quad x \in \{0,1\}^6. \end{array} \tag{L_0}$$

Si dica se per risolverlo risulta necessario effettuare a partire da quest'ultimo un'operazione di branching.

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (L_0) nel seguente problema

$$\begin{array}{l} \max\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 5 \\ \quad x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 6. \end{array}$$

Inoltre alcune variabili sono immediatamente assegnabili sulla base dei segni dei propri coefficienti, e si ha: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 - y_5$, $x_6 = 0$, ottenendo il problema equivalente

$$\begin{array}{l} \max\ 2x_1 + 2y_5 \\ \quad x_1 + 2y_5 \leq 8 \\ \quad x_1, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

Riordinando i rapporti tra i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ed i coefficienti delle stesse nel vincolo, si ottiene

$$\frac{2}{1} \geq \frac{2}{2}$$

da cui il problema (L_1) rimane

$$\begin{array}{l} \max\ 2x_1 + 2y_5 \\ \quad x_1 + 2y_5 \leq 8 \\ \quad x_1, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

che ammette immediatamente la soluzione intera $x_1 = y_5 = 1$. Quindi il processo di soluzione del problema (L_0) NON richiede di effettuare alcun branching.

Esercizio 2 (***)

Si supponga assegnato un problema di B&B. Sia noto che all'iterazione corrente la lista $\mathcal{L}$ dei problemi aperti contenga i 5 problemi $\{(P1), (P2), (P3), (P4), (P5)\}$. Si supponga anche che il problema di B&B sia un problema di *minimo*, e che il valore *ottimo corrente* della funzione obiettivo sia $\tilde{z} = 17$, cui corrisponde la soluzione corrente $\tilde{x}$. Per la soluzione *rilassata* del problema (Pi) si ha

	Valore funz. obiettivo di Pi, nella soluz. rilassata x_i	soluzione rilassata x_i di Pi
P1	z_1	x_1
P2	z_2	x_2
P3	z_3	x_3
P4	z_4	x_4
P5	z_5	x_5

Si dicano (motivandole) le condizioni che devono soddisfare le quantità $\{z_i\}$ e la natura (punto a coordinate intere, oppure punto a coordinate non intere) dei punti $\{x_i\}$, affinchè: se si estraggono dalla lista P1, P3 o P5 si aggiornerà sia $\tilde{z}$ che $\tilde{x}$, mentre se si estraggono dalla lista P2 o P4 si aggiornerà $\tilde{z}$ ma NON $\tilde{x}$.

SOLUZIONE:

Dal momento che si tratta di un problema di *minimo*, se all'iterazione corrente vine estratto Pi dalla lista, si avrà un aggiornamento per $\tilde{z}$ e $\tilde{x}$ se e solo se $z_i < \tilde{z}$ e x_i risulta a coordinate intere. Pertanto dovrà essere $z_1 < 17$, $z_3 < 17$ e $z_5 < 17$, con x_1, x_3 ed x_5 a coordinate intere.

Invece la seconda specifica, qualora vengano estratti P2 o P4, non può essere mai soddifatta, in quanto $\tilde{z}$ viene aggiornato se e solo se x_i risulta a coordinate intere.

Esercizio 3 (***)

Un'impresa di consegna pacchi a domicilio mediamente deve consegnare 150 pacchi (p_i, $i = 1, \dots, 150$) avendo a disposizione 6 corrieri (c_j, $j = 1, \dots, 6$). Ogni pacco va assegnato ad un solo corriere e non possono risultare a fine giornata pacchi non assegnati. Alcuni corrieri si predispongono autonomamente per potersi aiutare nella consegna, pertanto alcuni pacchi vengono assegnati ai corrieri seguendo le seguenti specifiche:

- ogni corriere deve consegnare da un minimo di 12 ad un massimo di 25 pacchi;
- ai corrieri c_1 e c_2 (insieme) vanno consegnati almeno 45 pacchi;
- i pacchi p_{10} e p_{11} hanno un contenuto di valore, pertanto se al corriere c_3 viene assegnato il pacco p_{10} non gli può essere assegnato anche il pacco p_{11};
- i pacchi $p_{80}, \dots, p_{150}$ devono essere assegnati esclusivamente al gruppo dei corrieri c_1, c_2, c_3.

Descrivere un modello di PL/PLI, per l'assegnazione dei pacchi ai corrieri, considerando che l'assegnazione di un qualsiasi pacco ad un qualsiasi corriere ha un costo unitario (1 Euro), mentre è previsto un costo fisso pari a 2 Euro, nell'eventualità in cui si assegnassero più di 75 pacchi ai corrieri c_1, c_2, c_3.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il pacco } i\text{−simo viene assegnato al corriere } c_j, \\ & i = 1, \dots, 150, \quad j = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 1 & \text{se ai corrieri (nel complesso) } c_1, c_2, c_3 \text{ vengono assegnati} \\ & \text{piu}' \text{ di 75 pacchi} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\alpha,\ \beta \in \{0, 1\}$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{150} \sum_{j=1}^{6} y_{ij} + 2z$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{6} y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 150, \\
&12 \le \sum_{i=1}^{150} y_{ij} \le 25, \quad j = 1, \dots, 6, \\
&\sum_{i=1}^{150} (y_{i1} + y_{i2}) \ge 45, \\
&y_{10,3} \le \alpha M, \quad M \gg 1, \\
&y_{11,3} \le \beta M, \quad M \gg 1, \\
&\alpha + \beta \le 1, \\
&y_{i,j} = 0, \quad i = 80, \dots, 150, \quad j = 4, 5, 6, \\
&z \ge \frac{\sum_{i=1}^{150} \sum_{j=1}^{3} y_{ij} - 75}{M}, \qquad M \gg 1
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Si consideri il seguente poliedro in $\mathbb{R}^3$, in cui è presente il parametro reale a

$$\mathcal{P} \quad : \quad \begin{cases} ax + y + z \geq 3 \\ 2y - z \leq 1 \\ 2ax + y \geq 3. \end{cases}$$

Determinare, se possibile, i valori del parametro a affinchè il punto $u = (1,1,1)^T \in \mathbb{R}^3$ NON risulti un vertice del poliedro.

SOLUZIONE:

Il poliedro contiene al massimo un numero di vertici pari a

$$\frac{3!}{3!(1-3)!} = 1.$$

Affinchè il punto u non sia un vertice deve verificarsi almeno una delle seguenti condizioni:

- u non è ammissibile per il poliedro,
- almeno uno dei vincoli non risulta attivo in u,
- i tre vincoli assegnati non sono linearmente indipendenti nel punto u.

Relativamente alla prima condizione, per l'ammissibilità di u deve essere

$$\begin{cases} a + 1 + 1 \geq 3 \\ 2 - 1 \leq 1 \\ 2a + 1 \geq 3 \end{cases}$$

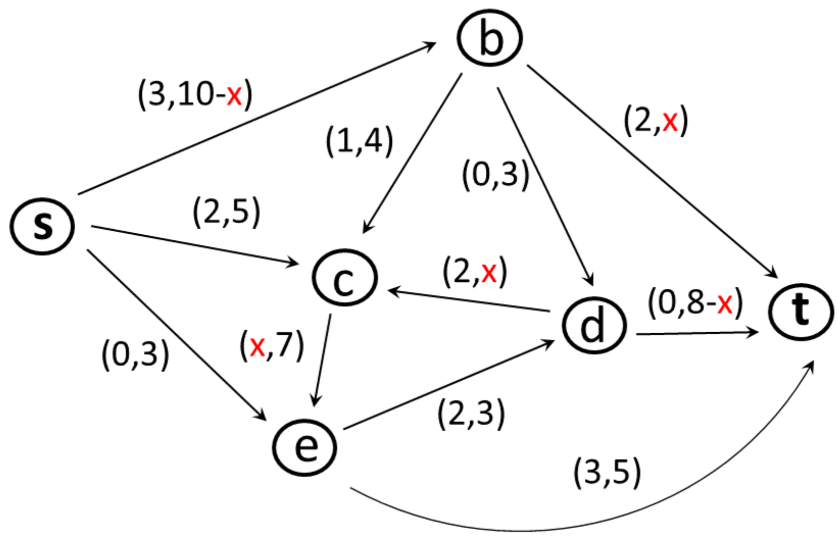
da cui $a \geq 1$. Pertanto, scegliendo $a < 1$ il punto u NON risulta ammissibile e quindi non potrà essere un vertice del poliedro. Inoltre, se $a > 1$ risulta che il primo vincolo non risulta attivo, quindi scegliendo $a > 1$ di nuovo il punto u non potrà essere un vertice del poliedro.
Relativamente alla terza condizione, basterà imporre la condizione di singolarità

$$0 = \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2a & 1 & 0 \end{pmatrix} = -5a.$$

Pertanto imponendo $a = 0$ la matrice dei coefficienti associati ai 3 vincoli sarà singolare ed il punto u non potrà essere un vertice.
Riassumendo quindi, basterà prendere un qualunque valore $a \neq 1$ affinchè il punto u NON risulti un vertice.

Esercizio 5

Dato il seguente grafo, determinare l'intervallo di valori di x affinchè il vettore di flusso del grafo risulti ammissibile. Inoltre, fissato $x = 5$, si risolva il problema del massimo flusso e si dica se il taglio $(W, \bar{W})$, con $W = \{s, b, c, d, e\}$ e $\bar{W} = \{t\}$, è un taglio a capacità minima.



SOLUZIONE:

Per soddisfare i vincoli di capacità è necessario che siano soddisfatte le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} 10 - x \geq 3 \\ x \geq 2 \\ 8 - x \geq 0 \\ x \leq 7. \end{cases}$$

Inoltre, per soddisfare il vincolo di conservazione al nodo (c) deve essere verificata l'equazione $x = 5$. Pertanto complessivamente si deve avere $x = 5$. Fissando ora $x = 5$ (in base al testo), il vettore di flusso sul grafo risulta ammissibile, e volendone calcolare il massimo flusso si avrà quanto segue. Il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 5.$$

È possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso corrispondenti:

- $P_1 = \{s, b, t\}$, con $\delta = 2$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, e, t\}$, con $\delta = 2$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 9$
- $P_3 = \{s, c, d, t\}$, con $\delta = 2$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 11$
- $P_4 = \{s, c, b, d, t\}$, con $\delta = 1$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 12$
- $P_5 = \{s, e, d, b, t\}$, con $\delta = 1$, da cui $f_5 = f_4 + \delta = 13$.

Inoltre si verifica subito che il taglio proposto $(W, \bar{W})$ è a capacità minima.

Domanda Scritta 1 (***)

Si dimostri che il problema del massimo flusso su grafi orientati può essere formulato come problema di Programmazione Lineare.

Domanda Scritta 2 (***)

Si considerino le matrici $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$. Si trasformi esplicitamente il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A_1 x \geq b_1, \ A_2 x \geq b_2\}$ nella *forma standard*.

Domanda Scritta 3

Data la funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si dimostri esplicitamente che gli insiemi di livello della funzione $g(x) = af(x) + b$, con $a > 0$, risultano convessi.