Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

20 gennaio 2022

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo complessivo** per la prova è di **1h 40'**.
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Esercizio 1

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + 6x_6 \\ & -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \ \leq\ 0 \\ & x \in \{0,1\}^6, \end{aligned} \qquad (K_0)$$

e lo si risolva con il metodo del B&B in $\mathbb{R}^6$.

SOLUZIONE:

Chiaramente il punto a coordinate intere $\tilde{x} = (0,0,0,0,0,0)^T$ è ammissibile per il problema e gli corrisponde il valore della funzione obiettivo $\tilde{z} = 0$. Quindi $\tilde{x}$ rappresenta il nostro ottimo corrente del problema. Osservando poi i segni delle variabili del problema (K_0) possiamo innanzitutto dedurre che:

- $x_5 = 0$ (infatti x_5 ha segno negativo nella funzione obiettivo, i.e. riduce quest'ultima, e segno positivo nel vincolo, i.e. contribuisce a diminuire il termine noto);
- $x_6 = 1$ (infatti x_6 ha segno positivo nella funzione obiettivo, i.e. incrementa quest'ultima, e segno negativo nel vincolo, i.e. contribuisce ad aumentare il termine noto);
- $x_1 = 1 - y_1$ (infatti x_1 ha segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo);
- $x_3 = 1 - y_3$ (infatti x_3 ha segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo).

Di conseguenza il problema diventa

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 + 2x_2 + 3y_3 + 4x_4 + 2 \\ & 2y_1 + x_2 + 2y_3 + x_4 \ \leq\ 5 \\ & y_1, x_2, y_3, x_4 \in \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_0)$$

Possiamo ora creare la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$, dalla quale estraiamo l'unico problema $(\tilde{K}_0)$ presente. Ne consideriamo il rilassamento lineare ed ordiniamo in modo non crescente i rapporti dei coefficienti (i.e. 1/2, 2/1, 3/2 e 4/1) delle 4 variabili y_1, x_2, y_3, x_4, ottenendo il nuovo ordinamento x_4, x_2, y_3, y_1. Passiamo pertanto a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_4 + 2x_2 + 3y_3 + y_1 + 2 \\ & x_4 + x_2 + 2y_3 + 2y_1 \ \leq\ 5, \\ & 0 \leq x_4, x_2, y_3, y_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Si ottiene $h = 3$, da cui per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$ si ha $x_4 = x_2 = y_3 = 1$ e $y_1 = 1/2$, cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $\bar{z} = 11.5$. Dal momento che $\bar{z} > 0$ ma a $\bar{z}$ non corrisponde un punto a coordinate intere, allora chiudiamo $(\tilde{K}_0)$ ed effettuiamo il *branching* sulla variabile y_1. Si ottengono i due sottoproblemi (dove rispettivamente $y_1 = 0$ e $y_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_4 + 2x_2 + 3y_3 + 2 \\ & x_4 + x_2 + 2y_3 \ \leq\ 5 \\ & x_4, x_2, y_3 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_4 + 2x_2 + 3y_3 + 3 \\ & x_4 + x_2 + 2y_3 \ \leq\ 3 \\ & x_4, x_2, y_3 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_2)$$

che aggiungiamo alla lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{K}_1)$ che, ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $\bar{x}^{(1)} = (1,1,0,1,0,1)^T$ con $\bar{z}^{(1)} = 11 > \tilde{z}$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente, ponendo $\tilde{x} = (1,1,0,1,0,1)^T$ e $\tilde{z} = 11$.
Similmente estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che (con analogo conto) ammette una soluzione rilassata cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $\bar{z}^{(2)} = 10.5 < 11 = \tilde{z}$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\tilde{x}$. Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha

$$x^* = \tilde{x} = (1,1,0,1,0,1)^T, \qquad z^* = \tilde{z} = 11.$$

$\boxed{\textbf{Esercizio 2}}$

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^2$, e si considerno i punti $\bar{x} = (1, 1, 1)^T$ e $\bar{y} = (2, 2, 2)^T$. Si dica (motivandolo) se esiste un punto $\bar{z}$ appartenente al segmento di estremi $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (i.e. $\bar{z} \in [\bar{x}, \bar{y}]$), tale che $f(\bar{y}) = f(\bar{x})/6$.

SOLUZIONE:

Si osservi che $f(\bar{y}) = 10$ mentre $f(\bar{x}) = 3$ pertanto la relazione $f(\bar{y}) = f(\bar{x})/6$ non può essere soddisfatta, quindi il punto $\bar{z} \in [\bar{x}, \bar{y}]$ non può esistere. Da una differente prospettiva, se tale punto $\bar{z}$ esistesse allora per il Teorema del Valor Medio dovrebbe risultare

$$f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{z})^T (\bar{y} - \bar{x}),$$

ovvero

$$f(\bar{x})/6 = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{z})^T (\bar{y} - \bar{x}),$$

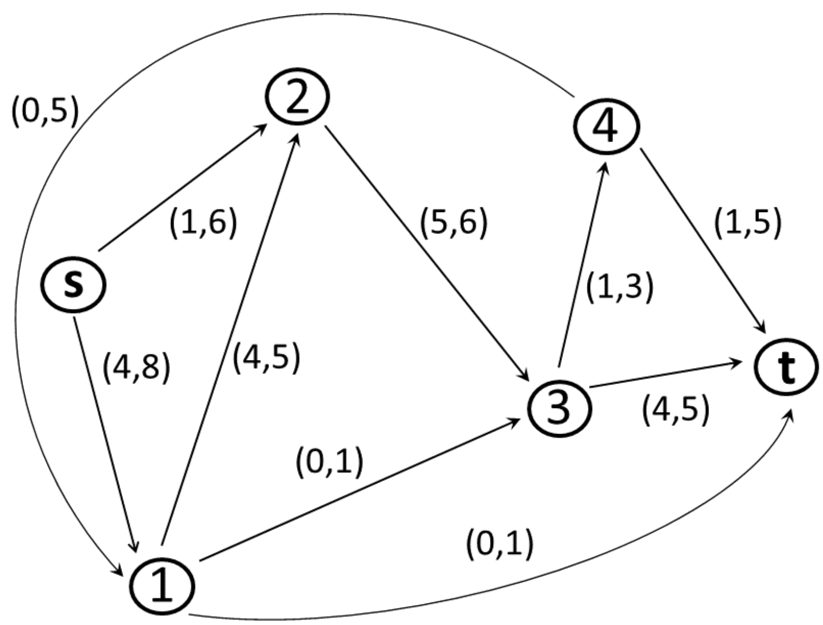
i.e. dovrebbe esistere un valore $\lambda \in [0, 1]$ che soddisfi l'equazione:

$$\frac{3}{6} - 3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2[\lambda \bar{x}_2 + (1 - \lambda)\bar{y}_2] \\ \\ 2[\lambda \bar{x}_3 + (1 - \lambda)\bar{y}_3] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli l'equazione fornisce il valore $\lambda = 23/8$, il quale essendo fuori dall'intervallo previsto $[0, 1]$ conferma che NON esiste il punto $\bar{z}$ richiesto.

Esercizio 3

Si consideri il seguente grafo: (i) verificare se il vettore di flusso corrente è ammissibile, (ii) calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's' indicando i cammini aumentanti identificati, (iii) indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

(i) Si noti che per ciascun nodo (esclusi la sorgente ed il pozzo) il flusso entrante coincide con quello uscente; inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Per quanto riguarda il punto (ii), il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 5.$$

Inoltre, è possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso indicati di seguito:

- $P_1 = \{s, 2, 3, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 6$
- $P_2 = \{s, 1, 3, 4, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 7$
- $P_3 = \{s, 1, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 8$.

Infine, relativamente al punto (iii), un taglio a capacità minima è dato dalla seguente coppia di insiemi:

$$W = \{s, 1, 2\}, \qquad \bar{W} = \{3, 4, t\},$$

che dopo un immediato controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}) = 8.$$

Domanda Scritta 1

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa su $\mathbb{R}^n$, dimostrare (usando la definizione di convessità per una funzione reale) che gli insiemi di livello della funzione

$$g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

sono convessi.

Domanda Scritta 2

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa sull'insieme convesso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dimostrare che ogni suo minimo locale su A è anche un suo minimo globale su A.