Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

16 Giugno 2024

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (Novembre 2022) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 15'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 40'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Domanda Scritta 1 + Esercizio 1

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, e si consideri il segmento identificato dagli estremi $P_1 = (1,1,1)^T$ e $P_2 = (2,2,2)^T$.

1. Enunciare il Teorema del Valor Medio (I ordine e II ordine) per la funzione $g(x_1, x_2, x_3)$;
2. Identificare un punto Q sul segmento in modo tale da scrivere esplicitamente il Teorema del Valor Medio (sia I ordine che II ordine) per $g(x_1, x_2, x_3)$, in funzione di P_1, P_2 e Q.

SOLUZIONE:
Dal momento che $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ è possibile applicare il Teorema del Valor Medio sia del I ordine che del II ordine, essendo (rispettivamento per il I ordine ed il II ordine)

1a) $p(P_2) = g(P_1) + \nabla g(P_1)^T (P_2 - P_1) + o(\|P_2 - P_1\|)$, con $\lim_{P_2 \to P_1} o(\|P_2 - P_1\|)/\|P_2 - P_1\| = 0$

1b) $p(P_2) = g(P_1) + \nabla g[P_1 + \theta_1(P_2 - P_1)]^T (P_2 - P_1)$, dove $\theta_1 \in [0,1]$

2a) $p(P_2) = g(P_1) + \nabla g(P_1)^T (P_2 - P_1) + 1/2 (P_2 - P_1)^T \nabla^2 g(P_1)(P_2 - P_1) + o(\|P_2 - P_1\|^2)$, dove $\lim_{P_2 \to P_1} o(\|P_2 - P_1\|^2)/\|P_2 - P_1\|^2 = 0$

2b) $p(P_2) = g(P_1) + \nabla g(P_1)^T (P_2 - P_1) + 1/2 (P_2 - P_1)^T \nabla^2 g[P_1 + \theta_2(P_2 - P_1)](P_2 - P_1)$, dove $\theta_2 \in [0,1]$

Per l'identificazione del punto $Q \in \mathbb{R}^3$ basterà considerare per Q l'espressione (rispettivamente per il I ordine ed il II ordine)

$$Q = \begin{cases} P_1 + \theta_1(P_2 - P_1) & \theta_1 \in [0,1] \\ P_1 + \theta_2(P_2 - P_1) & \theta_2 \in [0,1]. \end{cases}$$

Quindi, ricordando che $g(P_1) = 1 + 1 + 1 = 3$, $g(P_2) = 8 + 8 + 8 = 24$ e

$$\nabla g[P_1 + \theta_1(P_2 - P_1)] = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \end{pmatrix}_{P_1 + \theta_1(P_2 - P_1)} = \begin{pmatrix} 3(1+\theta_1)^2 \\ 3(1+\theta_1)^2 \\ 3(1+\theta_1)^2 \end{pmatrix},$$

nel caso del Teorema del Valor Medio del I ordine basterà imporre la condizione

$$24 = 3 + \nabla g[P_1 + \theta_1(P_2 - P_1)]^T (P_2 - P_1) = 3 + \begin{pmatrix} 3(1+\theta_1)^2 \\ 3(1+\theta_1)^2 \\ 3(1+\theta_1)^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che fornisce il valore $\theta_1 = \sqrt{7/3} - 1 \approx 0.527$. Un ragionamento simile vale nel caso del Teorema del Valor Medio del II ordine, per ricavare il valore di θ_2.

Domanda Scritta 2

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, concava sull'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, *dimostrare esplicitamente* (applicando la definizione di funzione convessa e di insieme convesso) che ogni insieme di livello della funzione $g(x) = -f(x)$ è convesso.

Esercizio 2 (***)

Un'industria brianzola produce 3 tipi di pasta alimentare, a partire da diversi tipi di frumento, utilizzando 3 filiere di produzione. Ciascun tipo di pasta prevede un costo unitario di produzione diverso, in relazione alla filiera di produzione sulla quale viene prodotta. Tale costo unitario (Euro/Kg) è riportato come segue

tipo pasta	filiera 1	filiera 2	filiera 3
pasta 1	0.31	0.41	0.38
pasta 2	0.37	0.45	0.49
pasta 3	0.46	0.58	0.44

Ciascun tipo di pasta viene poi venduta al prezzo di seguito riportato (Euro/Kg)

pasta 1	1.09
pasta 2	1.25
pasta 3	1.45

È previsto l'uso di manodopera specializzata, la qual cosa implica che se sulla filiera di produzione 1 si produce la pasta di tipo 1 o di tipo 3, allora è necessario pagare un costo aggiuntivo di 8000 Euro. Le specifiche di produzione prevedono inoltre che:

- se la quantità di pasta 2 prodotta è superiore ai 2300 Kg, oppure se la quantità di pasta 2 prodotta sulla filiera di produzione 1 è superiore ai 1800 Kg, allora va pagato un costo addizionale di manutenzione di 4000 Euro;
- la produzione di pasta 3 è incompatibile con la filiera di produzione 3. Inoltre, per esigenze di mercato, la produzione di pasta 3 sulla filiera 2 è incompatibile con la produzione di pasta 2 sulla filiera 2;
- la somma delle quantità di pasta di tipo 1 e 3, deve essere non inferiore ai 4/7 della pasta totale prodotta;
- per esigenze relative all'assunzione di manodopera, sulla filiera 2 si devono produrre non meno di 2850 Kg di pasta in più, rispetto alla produzione di *ciascuna* delle filiere 1 e 3.

Si formuli un modello di PL/PLI, per la massimizzazione dei profitti dalla vendita della pasta, in base al quale si possano determinare le quantità di ciascuna pasta prodotta in ciascuna filiera.

SOLUZIONE:

$x_{ij} \quad = \quad$ Kg di pasta i-sima ($i = 1,2,3$) prodotti sulla filiera di produzione j-sima ($j = 1,2,3$)

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se si produce pasta 1 o 3 sulla filiera 1} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{21} + x_{22} + x_{23} > 2300 \text{ oppure se } x_{21} > 1800 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\alpha, \beta \in \{0,1\}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & 1,09\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + 1,25\sum_{j=1}^{3} x_{2j} + 1,45\sum_{j=1}^{3} x_{3j} + \\
& - (0,31x_{11} + 0,41x_{12} + 0,38x_{13}) - (0,37x_{21} + 0,45x_{22} + 0,49x_{23}) + \\
& - (0,46x_{31} + 0,58x_{32} + 0,44x_{33}) - 8000y - 4000z
\end{aligned}$$

$$y \ge \frac{x_{11} + x_{31}}{M}, \qquad M \gg 1;$$

$$\sum_{j=1}^{3} (x_{1j} + x_{3j}) \ge \frac{4}{7}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij};$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \ge \sum_{i=1}^{3} x_{i1} + 2850;$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \ge \sum_{i=1}^{3} x_{i3} + 2850;$$

$$z \ge \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23} - 2300}{M};$$

$$z \ge \frac{x_{21} - 1800}{M};$$

$$x_{33} = 0;$$

$$x_{32} \le \alpha M;$$

$$x_{22} \le \beta M;$$

$$\alpha + \beta \le 1;$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3.$$

Esercizio 3 (***)

Risolvere il seguente problema di Knapsack binario

$$\begin{aligned} \min\ & -1.2z_1 + z_2 - z_3 - z_4 - 1.5z_5 - 0.3z_6 - 0.3z_7 \\ & 2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + 2z_7 - 3 \ \le\ 0 \\ & z \in \{0,1\}^7. \end{aligned} \qquad (L_0)$$

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (L_0) nel seguente problema

$$\begin{aligned} \max\ & 1.2z_1 - z_2 + z_3 + z_4 + 1.5z_5 + 0.3z_6 + 0.3z_7 \\ & 2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + 2z_7 \le 3 \\ & z_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Inoltre una variabile è immediatamente assegnabile sulla base dei segni dei propri coefficienti, e si ha: $z_2 = 0$, ottenendo il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max\ & 1.2z_1 + z_3 + z_4 + 1.5z_5 + 0.3z_6 + 0.3z_7 \\ & 2z_1 + 2z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + 2z_7 \le 3 \\ & z_1, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Riordinando i rapporti tra i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ed i coefficienti delle stesse nel vincolo, si ottiene

z_5	z_4	z_1	z_3	z_6	z_7
1.5	1	1.2	1	0.3	0.3
1	1	2	2	1	2

da cui si ottiene il problema (L_1)

$$\begin{aligned} \max\ & 1.5z_5 + z_4 + 1.2z_1 + z_3 + 0.3z_6 + 0.3z_7 \\ & z_5 + z_4 + 2z_1 + 2z_3 + z_6 + 2z_7 \le 3 \\ & z_5, z_4, z_1, z_3, z_6, z_7 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Ora identifichiamo la soluzione iniziale $\tilde{z} = 0$, cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $\tilde{f} = 0$. Creiamo poi la lista $\mathcal{L} = \{(L_1)\}$, dalla quale estraiamo l'unico problema (L_1) e ne risolviamo il rilassamento lineare (RL_1)

$$\begin{aligned} \max\ & 1.5z_5 + z_4 + 1.2z_1 + z_3 + 0.3z_6 + 0.3z_7 \\ & z_5 + z_4 + 2z_1 + 2z_3 + z_6 + 2z_7 \le 3 \\ & 0 \le z_5, z_4, z_1, z_3, z_6, z_7 \le 1, \end{aligned}$$

da cui $h = 2$ e la cui soluzione rilassata (NON intera) risulta

$$\begin{cases} \hat{z}_5 = \hat{z}_4 = 1 \\ \hat{z}_1 = \frac{3-(1+1)}{2} = 1/2 \\ \hat{z}_3 = \hat{z}_6 = \hat{z}_7 = 0, \end{cases}$$

corrispondente al valore della funzione obiettivo $\hat{f} = 1.5+1+1.2\cdot 0.5 = 3.1 > \tilde{f}$. Pertanto procediamo a chiudere (L_1) e dividere (branching) (L_1) nei sottoproblemi (L_2) (con $z_1 = 0$) e (L_3) (con $z_1 = 1$) di seguito rispettivamente indicati:

$$\begin{aligned} \max\ & 1.5z_5 + z_4 + z_3 + 0.3z_6 + 0.3z_7 \\ & z_5 + z_4 + 2z_3 + z_6 + 2z_7 \le 3 \\ & z_5, z_4, z_3, z_6, z_7 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 1.5z_5 + z_4 + z_3 + 0.3z_6 + 0.3z_7 + 1.2 \\ & z_5 + z_4 + 2z_3 + z_6 + 2z_7 \le 1 \\ & z_5, z_4, z_3, z_6, z_7 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

e li inseriamo nella lista $\mathcal{L} = \{(L_2), (L_3)\}$.Estraiamo ora da $\mathcal{L}$ il problema (L_2) e ne risolviamo il rilassamento lineare (RL_2), ottenendo $h = 2$ e la soluzione rilassata (NON intera)

$$\begin{cases} \hat{z}_5 = \hat{z}_4 = 1 \\ \hat{z}_3 = \frac{3-(1+1)}{2} = 1/2 \\ \hat{z}_6 = \hat{z}_7 = 0, \end{cases}$$

con $\hat{f} = 1.5 + 1 + 0.5 = 3 > \tilde{f}$. Pertanto chiudiamo (L_2) e lo dividiamo nei sottoproblemi (L_4) (con $z_3 = 0$) e (L_5) (con $z_3 = 1$) di seguito (rispettivamente) riportati:

$$\begin{aligned} \max\ & 1.5z_5 + z_4 + 0.3z_6 + 0.3z_7 \\ & z_5 + z_4 + z_6 + 2z_7 \leq 3 \\ & z_5, z_4, z_6, z_7 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 1.5z_5 + z_4 + 0.3z_6 + 0.3z_7 + 1 \\ & z_5 + z_4 + z_6 + 2z_7 \leq 1 \\ & z_5, z_4, z_6, z_7 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

essendo ora $\mathcal{L} = \{(L_3), (L_4), (L_5)\}$. Estraiamo (L_3) da $\mathcal{L}$ e risolviamo il rilassamento lineare (RL_3) da cui $h = 1$ e si ottiene la soluzione rilassata (intera)

$$\begin{cases} \hat{z}_5 = 1 \\ \hat{z}_4 = \hat{z}_3 = \hat{z}_6 = \hat{z}_7 = 0, \end{cases}$$

con $\hat{f} = 1.5 + 1.2 = 2.7 > \tilde{f}$. Pertanto chiudiamo (L_3) ed aggiorniamo $\tilde{z} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ e $\tilde{f} = 2.7$. Ora estraiamo (L_4) da $\mathcal{L}$ e risolviamo il rilassamento lineare (RL_4) in cui $h = 3$ e la soluzione rilassata (intera) risulta

$$\begin{cases} \hat{z}_5 = \hat{z}_4 = \hat{z}_6 = 1 \\ \hat{z}_7 = 0, \end{cases}$$

con $\hat{f} = 1.5 + 1 + 0.3 = 2.8 > \tilde{f}$, pertanto chiudiamo (L_4) ed aggiorniamo $\tilde{z} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ e $\tilde{f} = 2.8$. Infine estraiamo (L_5) da $\mathcal{L}$ e risolviamo il rilassamento lineare (RL_5) essendo $h = 1$ ed ottenendo la soluzione rilassata (intera)

$$\begin{cases} \hat{z}_5 = 1 \\ \hat{z}_4 = \hat{z}_6 = \hat{z}_7 = 0 \end{cases}$$

con $\hat{f} = 1.5 + 1 = 2.5 < \tilde{f}$. Pertanto chiudiamo (L_5) senza aggiornare la soluzione ottima corrente. Quindi la soluzione finale risulta

$$z^* = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0), \qquad f^* = 2.8.$$

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 3}}$ (***)

Dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ (motivare ogni risposta):

- si definisca cosa sono i suoi vertici, e si dica se un poliedro ammette sempre vertici;
- si dica se un qualsiasi sistema lineare di equazioni e disequazioni in n variabili rappresenta un poliedro di $\mathbb{R}^n$;
- si dica se $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ rappresentano dei polìtopi. Si dica infine se un polìtopo in $\mathbb{R}^n$ è senz'altro un polìtopo anche in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 4}}$ (***)

Si consideri il problema di PL

$$\min_{x \in P} c^T x$$

dove P è il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, e lo si trasformi in *forma standard*. Si dica poi se l'insieme ammissibile del problema in forma standard può essere un polìtopo, mentre P è un generico poliedro, e viceversa.