Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

29 gennaio 2019

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2019) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 20'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 00'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ (***)

Dato il problema di Knapsack binario (dove $a > 0$ e $b > 0$)

$$\begin{array}{ll} \min & -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 \\ & ax_1 - x_2 + ax_3 + ax_4 - ax_5 \ \leq \ 2b \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{array} \qquad (L_0)$$

Determinare la relazione tra i parametri a e b in modo tale che il punto $\bar{x} = (1,1,0,1,0,0)^T$ sia una soluzione.

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (L_0) nel seguente problema

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 \\ & ax_1 - x_2 + ax_3 + ax_4 - ax_5 \leq 2b \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 6. \end{array}$$

Inoltre alcune variabili sono immediatamente assegnabili sulla base dei segni dei propri coefficienti, e si ha: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 1 - y_5$, $x_6 = 0$, ottenendo il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_4 + 2y_5 - 1 \\ & ax_1 + ax_4 + ay_5 \leq 2b + a + 1 \\ & x_1, x_4, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

Riordinando i rapporti tra i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ed i coefficienti delle stesse nel vincolo, si ottiene (essendo $a > 0$)

$$\frac{3}{a} \geq \frac{2}{a} \geq \frac{1}{a}$$

da cui il problema diventa

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2y_5 + x_4 - 1 \\ & ax_1 + ay_5 + ax_4 \leq 2b + a + 1 \\ & x_1, x_4, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

Sostituendo ora nel vincolo del problema sopra la soluzione $\bar{x}$ proposta (per la quale risulta infatti $x_1 = x_4 = y_5 = 1$), si ottiene la relazione

$$3a \leq 2b + a + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 2(a - b) \leq 1$$

che è la relazione richiesta.

$\boxed{\text{Esercizio 2} \quad (***)}$

Sia dato un problema di B&B. Si supponga che all'iterazione corrente la lista $\mathcal{L}$ dei problemi aperti sia data da $\mathcal{L} = \{(P1), (P2), (P3), (P4)\}$. Inoltre sia il valore *ottimo corrente* della funzione obiettivo $\tilde{z} = 10$, corrispondente al punto $\tilde{x}$. È noto che per la soluzione *rilassata* del problema (Pi) si ha

	Valore funz. obiettivo di Pi, nella soluz. rilassata x_i	soluzione rilassata x_i di Pi
P1	$z_1 = 9$	x_1 intera
P2	$z_2 = 10$	x_2 intera
P3	$z_3 = 11$	x_3 frazionaria
P4	$z_4 = 12$	x_4 intera

Qualora all'iterazione corrente venga estratto il problema (Pi) da $\mathcal{L}$, si dica come gestirne correttamente la soluzione, per il progresso dell'algoritmo di B&B.

SOLUZIONE:

Nello schema del B&B possono presentarsi due scenari: il problema è di *minimo* oppure di *massimo*. Trattiamo separatamente i due casi, estraendo uno per volta dalla lista i quattro problemi:
$\boxed{\text{MINIMO:}}$

- P1 $\longrightarrow$ il problema P1 va chiuso ed aggiornata la soluzione corrente, i.e. $\tilde{z} \leftarrow z_1$, $\tilde{x} \leftarrow x_1$;
- P2 $\longrightarrow$ il problema P2 va chiuso ma senza aggiornare la soluzione corrente $\tilde{z}$, $\tilde{x}$;
- P3 $\longrightarrow$ il problema P3 va chiuso ma senza aggiornare la soluzione corrente $\tilde{z}$, $\tilde{x}$;
- P4 $\longrightarrow$ il problema P4 va chiuso ma senza aggiornare la soluzione corrente $\tilde{z}$, $\tilde{x}$;

$\boxed{\text{MASSIMO:}}$

- P1 $\longrightarrow$ il problema P1 va chiuso ma senza aggiornare la soluzione corrente $\tilde{z}$, $\tilde{x}$;
- P2 $\longrightarrow$ il problema P2 va chiuso ma senza aggiornare la soluzione corrente $\tilde{z}$, $\tilde{x}$;
- P3 $\longrightarrow$ il problema P3 va chiuso effettuando un branching ma senza aggiornare la soluzione corrente $\tilde{z}$, $\tilde{x}$;
- P4 $\longrightarrow$ il problema P4 va chiuso aggiornando la soluzione corrente, i.e. $\tilde{z} \leftarrow z_4$, $\tilde{x} \leftarrow x_4$.

Esercizio 3 (***)

È necessario assegnare 200 job a 6 processori ($p_1, \dots, p_6$) diversi, per gestire la centralina di un satellite artificiale. I primi 100 job vanno assegnati ai processori p_1, p_2 e p_3, mentre i rimanenti job devono essere assegnati a p_3, p_4, p_5 e p_6. Le regole di assegnazione dei job prevedono che:

- ad ogni processore devono essere assegnati da 10 a 50 job;
- ogni job deve essere assegnato ad uno ed uno soltanto dei processori;
- il numero di job assegnati al processore p_i ($i = 1, 2$) deve essere *non inferiore* al numero di job assegnati al processore p_{i+1};
- se viene assegnato il job 150 al processore p_4, allora al medesimo processore *non si può* assegnare anche il job 151;
- se al processore p_6 vengono assegnati almeno 20 job, allora va considerato un costo aggiuntivo pari a 500$.

Descrivere un modello di PL/PLI, per l'assegnazione dei job ai processori, considerando un costo unitario (i.e. 1 $) per l'assegnazione di ciascun job a ciascun processore.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il job } i\text{−simo viene assegnato al processore } p_j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_6 = \begin{cases} 1 & \text{se al processore } p_6 \text{ vengono assegnati almeno 20 job} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{200} \sum_{j=1}^{6} x_{ij} + 500 y_6$$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, 200, \\
&x_{ij} = 0, \qquad i = 1, \dots, 100, \qquad j = 4, 5, 6, \\
&x_{ij} = 0, \qquad i = 101, \dots, 200, \qquad j = 1, 2, \\
&10 \leq \sum_{i=1}^{200} x_{ij} \leq 50, \qquad j = 1, \dots, 6 \\
&\sum_{i=1}^{200} x_{i1} \leq \sum_{i=1}^{200} x_{i2}, \\
&\sum_{i=1}^{200} x_{i2} \leq \sum_{i=1}^{200} x_{i3}, \\
&x_{150,4} + x_{151,4} \leq 1, \\
&y_6 \geq \frac{\sum_{i=1}^{200} x_{i6} - 19}{M}, \qquad M \gg 1
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Dato il poliedro

$$\mathcal{P} \quad : \quad \begin{cases} x - y + 2z \leq 1 \\ y - az \geq 2 \\ x + az \geq -1 \\ 2y + z \leq 0, \end{cases}$$

determinare il parametro a in modo tale che il poliedro ammetta *almeno due* vertici.

SOLUZIONE:

Il poliedro contiene al massimo un numero di vertici pari a

$$\frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Selezionando i primi tre vincoli (ignorando momentaneamente il IV vincolo) ed imponendo vincoli di uguaglianza si ha

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - az = 2 \\ x + az = -1 \end{cases}$$

da cui (imponendo $a \neq 1$)

$$x = \frac{-1-a}{1-a}, \qquad y = \frac{2}{1-a}, \qquad z = \frac{2}{1-a}, \tag{1}$$

che soddisfa anche il IV vincolo, purchè risulti $a > 1$. Affinchè il punto trovato sia anche vertice deve soddisfare la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 2(a-1) \neq 0.$$

Pertanto, per $a > 1$ il punto (1) risulta essere un vertice di P.

Con analogo ragionamento, selezionando i vincoli del poliedro con l'esclusione del III vincolo, e passando alle uguaglianze, si ha

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - az = 2 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

da cui (imponendo $a \neq -1/2$)

$$x = \frac{11+2a}{1+2a}, \qquad y = \frac{2}{1+2a}, \qquad z = -\frac{4}{1+2a}, \tag{2}$$

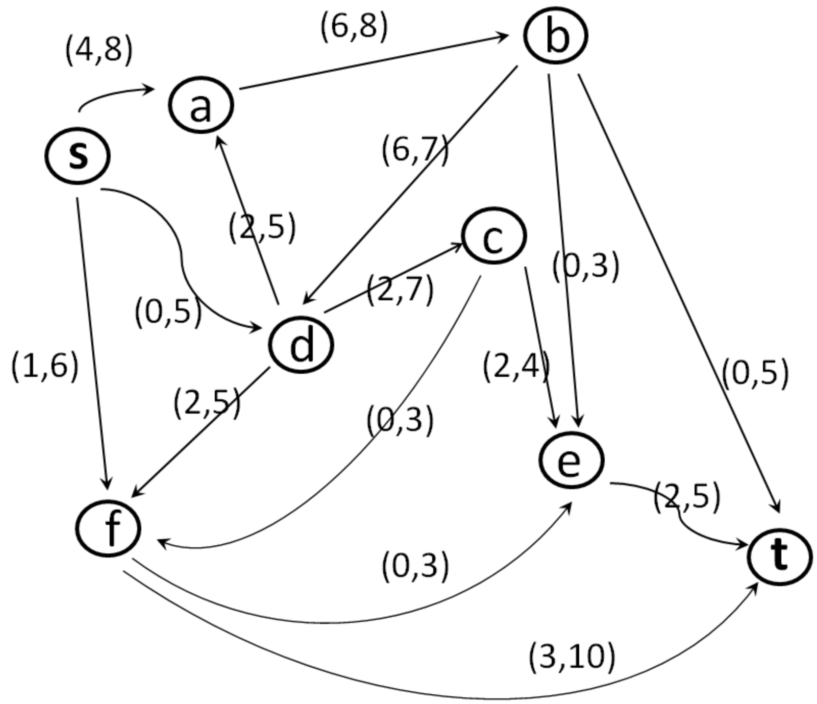
che soddisfa anche il III vincolo, purchè risulti $a > -1/2$. Affinchè il punto trovato sia anche vertice deve soddisfare la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a \neq 0.$$

Pertanto, per $a > -1/2$ il punto (2) risulta essere un vertice di P. Infine, per $a > 1$ entrambi i punti in (1) e (2) risulteranno vertici del poliedro.

Esercizio 5

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

Dopo una facile verifica si nota che per ciascun nodo il flusso entrante coincide con quello escente. Inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti, pertanto deduciamo che il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 5.$$

È possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso corrispondenti:

- $P_1 = \{s, a, b, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, f, t\}$, con $\delta^+ = 5$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 5$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 12$
- $P_3 = \{s, d, c, e, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_3 = f_1 + \delta = 14$
- $P_4 = \{s, d, b, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = 6$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 17$
- $P_5 = \{s, a, d, f, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = 2$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_5 = f_4 + \delta = 19$.

Inoltre un taglio a capacià minima è dato dal seguente:

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{a, b, c, d, e, f, t\},$$

che dopo un facile controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

Domanda Scritta 1 (***)

Si enuncino i rudimenti della Teoria della Dualità per problemi di Programmazione Lineare.

Domanda Scritta 2 (***)

Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \geq b\}$, lo si trasformi esplicitamente in *forma standard*.

Domanda Scritta 3

Dato il problema $\min_{x \in C} \ f(x)$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso ed $f(x)$ convessa su C, dimostrare che ogni suo minimo locale è anche un minimo globale.