Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

29 gennaio 2021: Esame in REMOTO

Regole per l'esame: la violazione comporta l'esclusione dello studente

- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- Ogni esercizio viene valutato con un **punteggio specifico**. La somma dei punteggi è pari a 32, per consentire l'assegnazione della eventuale *lode*.
- È necessario **numerare** e **scrivere** Nome-Cognome-Matricola su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente, prima di effettuarne la scansione ed il successivo invio al docente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo netto** per la prova è di **1h 30'** (escludendo il controllo documenti ed il tempo per lo snapshot della prima pagina delle soluzioni, durante la prova d'esame, da parte del docente)
- È **vietato** parlare durante la prova, avere vicino persone, usare testi/appunti/note/dispense.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dalla postazione di fronte al proprio PC/laptop, rimanendo nella visuale della fotocamera e con il microfono acceso.

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ (7 punti)

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario in $\mathbb{R}^6$ e lo si risolva con il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \max\ & -2y_2+3y_3-y_4-y_5+4y_6 \\ & -y_1+\frac{1}{2}-y_2+y_3+3y_4-3y_5+2y_6 \ \le\ 2 \\ & y_i\in\{0,1\},\quad i=1,\dots,6. \end{aligned} \qquad (K_0)$$

SOLUZIONE:

A partire dal problema dato, è possibile assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $y_1^*=1$, $y_2^*=1-z_2^*$, $y_4^*=0$, $y_5^*=1-z_5^*$, essendo $z_2^*,z_5^*\in\{0,1\}$. Si ottiene quindi il seguente problema equivalente semplificato

$$\begin{aligned} \max\ & -2(1-z_2)+3y_3-0-(1-z_5)+4y_6 \\ & -1-(1-z_2)+y_3+0-3(1-z_5)+2y_6 \ \le\ \frac{3}{2} \\ & z_2,y_3,z_5,y_6\in\{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_0)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \max\ & 2z_2+3y_3+z_5+4y_6-3 \\ & z_2+y_3+3z_5+2y_6 \ \le\ \frac{13}{2} \\ & z_2,y_3,z_5,y_6\in\{0,1\}. \end{aligned}$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione (ammissibile) intera corrente $\hat{w}=(\hat{z}_2,\hat{y}_3,\hat{z}_5,\hat{y}_6)=0$, con $\hat{f}(\hat{w})=-3$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L}=\{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{K}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare, e per risolverlo ordiniamo in modo decrescente i rapporti dei coefficienti delle 4 variabili $(z_2,\ y_3,\ z_5,\ y_6)$, i.e.

$$\frac{3}{1}\ \ge\ \frac{4}{2}\ \ge\ \frac{2}{1}\ \ge\ \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_3+4y_6+2z_2+z_5-3 \\ & y_3+2y_6+z_2+3z_5 \ \le\ \frac{13}{2} \\ & 0\le y_3,y_6,z_2,z_5\le 1. \end{aligned}$$

Risulta $h=3$, da cui si ottiene la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$y_3^{(0)}=1,\ y_6^{(0)}=1,\ z_2^{(0)}=1,\ z_5^{(0)}=\frac{\frac{13}{2}-(1+2+1)}{3}=5/6,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $3\cdot1+4\cdot1+2\cdot1+5/6-3=41/6\approx 6.83$, quindi superiore al valore $f(\hat{w})$. Di conseguenza chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $z_5=0$ e $z_5=1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_3+4y_6+2z_2-3 \\ & y_3+2y_6+z_2 \ \le\ \frac{13}{2} \\ & y_3,y_6,z_2\in\{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_3+4y_6+2z_2-2 \\ & y_3+2y_6+z_2 \ \le\ \frac{7}{2} \\ & y_3,y_6,z_2\in\{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_2)$$

aggiornando poi anche la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo da questa il primo problema che ammette la soluzione rilassata $y_3 = y_6 = z_2 = 1$ (coincidente con una soluzione intera), che nel dominio delle variabli originali del problema diventa $y^{(1)} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T$ con $f(y^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo $\hat{w} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T$, con $f(\hat{w}) = 6$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che ammette soluzione rilassata data da $y_3 = y_6 = 1$, $z_2 = 1/2$, che nel dominio delle variabli originali del problema diventa $y^{(2)} = (1\ 1/2\ 1\ 0\ 0\ 1)^T$, non coincidente con una soluzione intera. Ad essa corrisponde un valore della funzione obiettivo dato da $f(y^{(2)}) = 6$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare questa volta l'ottimo corrente $\hat{w}$. Per la soluzione finale si ha pertanto

$$y^* = \hat{w} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)^T.$$

Esercizio 2 **(7 punti)**

Un ristorante ha 5 tavoli per i clienti, dotati di un rispettivo numero di posti (pax) pari a 11, 10, 9, 7, 4, tutti attualmente prenotati. Inoltre, per servire ai tavoli il ristorante ha a disposizione 4 camerieri. Il ristorante desidera pianificare l'assegnazione dei camerieri ai tavoli, mediante un modello di PL/PLI, minimizzando i costi di pianificazione, sulla base dei seguenti dati:

1. se un cameriere viene destinato ad un tavolo, allora dovrà servire le portate a tutti i clienti che siedono a quel tavolo;
2. a ciascun cameriere non possono essere assegnati più di 15 clienti;
3. ciascun cameriere è remunerato proporzionalmente al numero di clienti serviti; inoltre, per via dell'esperienza personale e dell'anzianità di servizio, la remunerazione unitaria (i.e. per ciascun cliente) dei 4 camerieri è data da (Euro):

	camer. 1	camer. 2	camer. 3	camer. 4
remunerazione unitaria	15	17	18	20

4. ogni cameriere non può servire a più di 2 tavoli;
5. se un cameriere serve più di 10 persone, allora il gestore del ristorante deve pagare per quel cameriere un ulteriore gettone di presenza (costo fisso) pari a 20 Euro;
6. per incompatibilità ambientale, i camerieri 1 e 4 non possono servire insieme nè al tavolo 2 nè al tavolo 3.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il cameriere } i\text{−simo viene assegnato al tavolo } j\text{−simo,} \\ & i = 1,\ldots,4, \quad j = 1,\ldots,5 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il cameriere } i\text{−simo serve piu' di } 10 \text{ clienti,} \\ & i = 1,\ldots,4, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & 15(11x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 7x_{14} + 4x_{15}) + \\ & 17(11x_{21} + 10x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24} + 4x_{25}) + \\ & 18(11x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33} + 7x_{34} + 4x_{35}) + \\ & 20(11x_{41} + 10x_{42} + 9x_{43} + 7x_{44} + 4x_{45}) + 20\sum_{i=1}^{4} y_i \end{aligned}$$

Vincoli:

$$\begin{aligned} & 11x_{i1} + 10x_{i2} + 9x_{i3} + 7x_{i4} + 4x_{i5} \le 15, \quad i = 1,\ldots,4, \\ & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 2, \quad i = 1,\ldots,4, \\ & y_i \ge \frac{11x_{i1} + 10x_{i2} + 9x_{i3} + 7x_{i4} + 4x_{i5} - 10}{M}, \quad i = 1,\ldots,4, \quad M \gg 1, \\ & x_{12} + x_{42} \le 1, \\ & x_{13} + x_{43} \le 1, \\ & x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,4, \quad j = 1,\ldots,5. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ (5 punti)

Sia dato l'insieme delle disequazioni/equazioni in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_3 \ge -1 \\ -2x_2 \le 0 \\ x_1 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Si dica (motivandolo) se tali uguaglianze/disuguaglianze identificano un insieme convesso. Si dica poi se tale insieme risulta anche un poliedro, ed in quest'ultimo caso trovarne (ove ve ne siano) i vertici.

<u>SOLUZIONE:</u>

Tutti i vincoli sono associati a funzioni lineari/affini, pertanto ciascuno dei vincoli identifica un iperpiano o un semispazio. Di conseguenza, essendo tali vincoli anche in numero finito, la loro intersezione sarà un poliedro, e di conseguenza anche un insieme convesso.
Tale poliedro può contenere al massimo un numero di vertici pari al numero di terne (tre variabili) di vincoli. Di conseguza tale numero sarà banalmente pari a

$$\frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Ora verifichiamo se ciascuna delle 4 terne di vincoli può dar luogo ad un vertice.

(I): escludendo il primo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, e trasformando le restanti relazioni in equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ -2x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni risulta non-singolare, in quanto per la sua matrice dei coefficienti si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Inoltre il sistema ammette la soluzione (unica) $P_1 = (3/2 \;\; 0 \;\; -5/2)^T$ che soddisfa anche il primo vincolo. Pertanto P_1 è vertice del poliedro assegnato.

(II): escludendo il secondo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, e trasformando le restanti relazioni in equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni risulta non-singolare, in quanto per la sua matrice dei coefficienti si ha similmente al caso (I)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Inoltre il sistema ammette la soluzione (unica) $P_2 = (4 \; 0 \; 0)^T$ che soddisfa anche il secondo vincolo. Pertanto anche P_2 è vertice del poliedro assegnato.

(III): escludendo il terzo vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, e trasformando le restanti relazioni in equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni risulta non-singolare, in quanto per la sua matrice dei coefficienti si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Inoltre il sistema ammette la soluzione (unica) $P_3 = (3/2 \ \ -5 \ \ -5/2)^T$ che NON soddisfa anche il terzo vincolo. Pertanto P_3 NON è vertice del poliedro assegnato.

(IV): escludendo il quarto vincolo dal sistema di equazioni/disequazioni, e trasformando le restanti relazioni in equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ -2x_2 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni risulta *singolare*, in quanto per la sua matrice dei coefficienti si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto i vincoli associati alle sue righe non possono essere linearmente indipendenti e di conseguenza per questo caso NON è possibile calcolare/definire alcun punto di vertice.

Concludendo, i soli punti di vertice per il poliedro assegnato sono P_1 e P_2.

$\boxed{\text{Domanda Scritta 1}}$ **(7 punti)**

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e l'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $g(x)$ *concava* sull'insieme C. Si dimostri che ogni *massimo locale* del problema

$$\max_{x \in C} \; g(x)$$

è anche un *massimo globale* del medesimo problema.

$\boxed{\text{Domanda Scritta 2}}$ **(6 punti)**

Si consideri l'insieme $\mathcal{M}$ delle matrici $\{A_k\}$, con $A_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, dotate della forma (matrici triangolari inferiori)

$$A_k = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Si considerino per l'insieme $\mathcal{M}$ anche le consuete operazioni di somma tra matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice. Si dica, verificandolo esplicitamente, se l'insieme $\mathcal{M}$ rappresenta uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali.