Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

30 Gennaio 2024

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (Novembre 2022) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 15'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 35'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $f(x) = ax_1 + bx_2^2 + cx_3^3$, e si consideri il vettore $v = (1 \;\; d \;\; e)^T \in \mathbb{R}^3$, essendo $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Si dica preliminarmente se $f(x)$ ammette derivata direzionale lungo v su tutto $\mathbb{R}^3$. Si calcolino poi i parametri a, b, c, d, e in modo tale che (contemporaneamente):

(1) v sia di discesa lungo *tutto l'asse* x_1;

(2) v sia di discesa lungo il *semi–asse positivo* di x_2;

(3) v sia di discesa lungo il *semi–asse negativo* di x_3.

SOLUZIONE:
Esiste senz'altro la derivata direzionale di $f(x)$ lungo v su tutto $\mathbb{R}^3$, in quanto $f(x)$ risulta continuamente differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$. Inoltre, tale derivata direzionale sarà data (nel punto $x \in \mathbb{R}^3$) da

$$\nabla f(x)^T v = \begin{pmatrix} a \\ 2bx_2 \\ 3cx_3^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ e \end{pmatrix} = a + 2bdx_2 + 3cex_3^2. \qquad (1)$$

Pertanto, per il punto (1) nella precedente relazione poniamo a zero le variabili x_2 e x_3 ottenendo la condizione $a < 0$.

Per il punto (2) nella (1) poniamo a zero le variabili x_1 e x_3, ottenendo la disequazione $2bdx_2 < -a$. Poichè dal punto (1) deve essere $a < 0$, e dobbiamo assumere che x_2 sia positiva, la disequazione $2bdx_2 < -a$ potrà essere soddisfatta se e solo se $bd < 0$.

Per il punto (3) nella (1) poniamo a zero le variabili x_1 e x_2, ottenendo la disequazione $3cex_3^2 < -a$. Poichè dal punto (1) sappiamo che $a < 0$, dovendo assumere che x_3 sia negativa, la disequazione $3cex_3^2 < -a$ potrà essere soddisfatta se e solo se $ce < 0$.

Pertanto le tre condizioni che simultaneamente sono richieste ai parametri risultano essere: $a < 0$, $bd < 0$ e $ce < 0$.

Esercizio 2 (***)

In una frazione della città di Padova si devono svolgere le elezioni per il consiglio comunale. Sono presenti 45 seggi elettorali e la popolazione votante è di 17000 cittadini ($i = 1, \ldots, 17000$). Per esigenze pratiche i seggi vengono numerati in modo consecutivo, i.e. $j = 1, \ldots, 45$, in modo tale che seggi tra loro vicini hanno anche numeri vicini. Ad ogni cittadino deve essere assegnato uno ed un solo seggio elettorale, e ad ogni seggio non possono essere assegnati più di 500 votanti, per evitare di allungare le operazioni di spoglio delle schede. Inoltre, per cercare di equilibrare il numero di scrutatori nei seggi, se in un seggio si supera il numero di 400 votanti assegnati, allora a quel seggio viene assegnata una penalizzazione P (espressa in Euro) dovuta al costo di uno scrutatore aggiuntivo. In una particolare area della frazione è anche presente un ulteriore gruppo di 3000 cittadini ($k = 1, \ldots, 3000$), che vanno assegnati *in blocco* ai primi 25 seggi oppure agli ultimi 20 seggi (*quindi, non possono esistere due cittadini, nel gruppo dei 3000, che vengano rispettivamente assegnati ad un seggio tra i primi 25 e ad un seggio tra gli ultimi 20*).

Si formuli un modello di PL/PLI per la minimizzazione dei costi complessivi di assegnazione degli elettori ai seggi, sapendo che il costo di assegnazione dell'elettore i–simo (nel gruppo dei 17000) al seggio j–simo, o dell'elettore k–simo (nel gruppo dei 3000) al seggio j–simo, risulta pari rispettivamente a $c_{i,j}$ e $d_{k,j}$.

<u>SOLUZIONE:</u>

Scelta variabili:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } i\text{–simo viene assegnato al seggio } j\text{–simo,} \\ & i = 1, \ldots, 17000, \quad j = 1, \ldots, 45 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$z_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } k\text{–simo viene assegnato al seggio } j\text{–simo,} \\ & k = 1, \ldots, 3000, \quad j = 1, \ldots, 45 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il seggio } j\text{–simo e' riempito con piu' di 400 votanti,} \\ & j = 1, \ldots, 45, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se il gruppo dei 3000 elettori viene assegnato agli ultimi 25 seggi,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{17000} \sum_{j=1}^{45} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{k=1}^{3000} \sum_{j=1}^{45} d_{k,j} z_{k,j} + P \sum_{j=1}^{45} y_j$$

Vincoli:

$$\sum_{j=1}^{45} x_{i,j} = 1, \qquad i = 1, \dots, 17000$$

$$\sum_{j=1}^{45} z_{k,j} = 1, \qquad k = 1, \dots, 3000$$

$$\sum_{i=1}^{17000} x_{i,j} + \sum_{k=1}^{3000} z_{k,j} \leq 500, \qquad j = 1, \dots, 45$$

$$y_j \geq \frac{\sum_{i=1}^{17000} x_{i,j} + \sum_{k=1}^{3000} z_{k,j} - 400}{M}, \qquad j = 1, \dots, 45, \quad M \gg 1,$$

$$\alpha M \geq 1 - \sum_{j=1}^{25} z_{k,j}, \qquad k = 1, \dots, 3000$$

$$(1 - \alpha) M \geq 1 - \sum_{j=26}^{45} z_{k,j}, \qquad k = 1, \dots, 3000$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ (***)

Dato il problema di Knapsack binario

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\ & 5 - x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \ \geq \ 0 \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{array} \qquad (L_0)$$

Si dica (motivandolo esplicitamente) se per risolverlo risulta necessario effettuare a partire da quest'ultimo un'operazione di branching.

SOLUZIONE:

Trasformiamo prima il problema (L_0) nel seguente problema

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 5 \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{array}$$

Inoltre alcune variabili sono immediatamente assegnabili sulla base dei segni dei propri coefficienti, e si ha: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 - y_5$, $x_6 = 0$, ottenendo il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2y_5 \\ & x_1 + 2y_5 \leq 8 \\ & x_1, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

Riordinando i rapporti tra i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ed i coefficienti delle stesse nel vincolo, si ottiene

$$\frac{2}{1} \geq \frac{2}{2}$$

da cui il problema (L_1) rimane

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2y_5 \\ & x_1 + 2y_5 \leq 8 \\ & x_1, y_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

che ammette immediatamente la soluzione intera $x_1 = y_5 = 1$. Quindi il processo di soluzione del problema (L_0) NON richiede di effettuare alcun branching.

$\boxed{\text{Domanda Scritta 1}}$ (***)

Dato un poliedro P si definisca cosa sono i vertici. Dare inoltre almeno un esempio grafico per ciascuno dei seguenti casi: poliedro illimitato che ammette vertici, poliedro illimitato che NON ammette vertici, polìtopo. Infine si giustifichi, dal punto di vista teorico, se un polìtopo può essere *privo* di vertici.

$\boxed{\text{Domanda Scritta 2}}$ (***)

Si considerino le matrici $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$. Si trasformi esplicitamente il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A_1 x \geq b_1, \ A_2 x \geq b_2\}$ nella *forma standard.*

$\boxed{\text{Domanda Scritta 3}}$

Data la funzione $f(x) + 5$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e convessa sull'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, *dimostrare esplicitamente* che ogni minimo locale di $f(x) + 5$ è anche un suo minimo globale su C.