Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

9 gennaio 2019

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2018) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 15'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 55'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ (***)

Si risolva il seguente esercizio di Knapsack binario in $\mathbb{R}^6$, con il metodo del B&B.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 - x_6 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 \ \leq\ 2.5 \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{aligned} \tag{K_0}$$

SOLUZIONE:

In (K_0) possiamo senz'altro assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2 = 1$, in quanto ha segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo; $x_3 = 1 - y_3$, $x_6 = 1 - y_6$, con $y_3, y_6 \in \{0,1\}$, in quanto x_3 ed x_6 sono presenti con segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + y_3 + 2x_4 + 3x_5 + y_6 + 2 \\ & 2x_1 + y_3 + 2x_4 + x_5 + y_6 \ \leq\ 5.5 \\ & x_1, x_4, x_5, y_3, y_6 \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{$\tilde{K}_0$}$$

Ponendo semplicemente $x_1 = x_4 = x_5 = y_3 = y_6 = 0$, quest'ultimo problema ammette la soluzione intera corrente $\hat{x} = (0,1,1,0,0,1)^T$, con $f(\hat{x}) = 2$.

Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{K}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare e provvediamo ad ordinare in modo non decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 5 variabili (x_5, y_3, x_4, y_6 e x_1), i.e.

$$\frac{3}{1} \geq \frac{1}{1} \geq \frac{2}{2} \geq \frac{1}{1} \geq \frac{1}{2},$$

e di conseguenza si passa a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_5 + y_3 + 2x_4 + y_6 + x_1 + 2 \\ & x_5 + y_3 + 2x_4 + y_6 + 2x_1 \ \leq\ 5.5, \\ & 0 \leq x_1, x_4, x_5, y_3, y_6 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo $h = 4$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$x_5^{(0)} = 1,\ y_3^{(0)} = 1,\ x_4^{(0)} = 1,\ y_6^{(0)} = 1,\ x_1^{(0)} = \frac{5.5 - (1+1+2+1)}{2} = 1/4,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $9 + 1/4$, quindi superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_5 + y_3 + 2x_4 + y_6 + 2 \\ & x_5 + y_3 + 2x_4 + y_6 \ \leq\ 5.5 \\ & x_4, x_5, y_3, y_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \tag{$\tilde{K}_1$}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_5 + y_3 + 2x_4 + y_6 + 3 \\ & x_5 + y_3 + 2x_4 + y_6 \ \leq\ 3.5 \\ & x_4, x_5, y_3, y_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \tag{$\tilde{K}_2$}$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{K}_1)$ che, ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $x^{(1)} = (0,1,0,1,1,0)^T$ con $f(x^{(1)}) = 9$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente $\hat{x} = (0,1,0,1,1,0)^T$, con $f(\hat{x}) = 9$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che (con analogo conto) ammette soluzione rilassata data da $x^{(2)} = (1,1,0,3/4,1,1)^T$, con $f(x^{(2)}) = 8.5 < 9 = f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{x}$. Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha

$$x^* = (0,1,0,1,1,0)^T, \qquad f(x^*) = 9.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa su $\mathbb{R}^n$, e la funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si considerino gli insiemi

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) \leq \sqrt{3}\}, \qquad \mathcal{A}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \geq \sqrt{3}\}.$$

Si dica (dimostrandolo) se l'insieme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ è convesso. Inoltre si dica se è sempre possibile affermare che tale insieme risulta limitato.

SOLUZIONE:

L'insieme $\mathcal{A}_1$ è senz'altro convesso, perchè rappresenta un insieme di livello della funzione convessa $g(x)$. Similmente, l'insieme $\mathcal{A}_2$ può essere riscritto come

$$\mathcal{A}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -f(x) \leq -\sqrt{3}\},$$

ovvero un insieme di livello della funzione lineare (e quindi convessa su $\mathbb{R}^n$) $-f(x)$. Pertanto anche $\mathcal{A}_2$ risulta convesso e di conseguenza l'intersezione $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ è convessa. Infine, in generale non vi sono sufficienti informazioni per garantire che l'insieme $\mathcal{A}$ sia anche limitato (basterà prendere per esempio $n = 1$, con $g(x) = e^{-x}$ e $f(x) = x$; in tal modo risulterà $\mathcal{A}$ NON limitato).

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con

$$g(x) = x_2\sqrt{\ln(x_1 + x_3 - 2)}.$$

Si dica (argomentandolo) per quali valori di x_1, x_2, x_3 la funzione g ammette derivata direzionale. Inoltre se ne calcoli la derivata direzionale nel punto di coordinate $\bar{x} = (2, 2, 2)^T$, lungo la direzione $d = (1, 3, 1)^T$.

SOLUZIONE:

La funzione $g(x)$ ammette senz'altro derivata direzionale nel caso in cui $x_1 + x_3 - 2 > 1$ ovvero $x_1 + x_3 > 3$, in quanto ivi esiste sia la funzione che il suo gradiente. Inoltre, per $\nabla g(x)$ si ha in un intorno del punto $\bar{x}$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} x_2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln\left(x_1 + x_3 - 2\right)}} \cdot \dfrac{1}{x_1 + x_3 - 2} \\ \\ \sqrt{\ln\left(x_1 + x_3 - 2\right)} \\ \\ x_2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln\left(x_1 + x_3 - 2\right)}} \cdot \dfrac{1}{x_1 + x_3 - 2} \end{pmatrix},$$

con $\nabla g(\bar{x}) = (1/[2\sqrt{\ln(2)}], \quad \sqrt{\ln(2)}, \quad 1/[2\sqrt{\ln(2)}])^T$, ed in $\bar{x}$ si ha

$$D(g, d) = \nabla g(\bar{x})^T d = 1/[2\sqrt{\ln(2)}] + 3\sqrt{\ln(2)} + 1/[2\sqrt{\ln(2)}] \approx 2.0337.$$

Esercizio 4 (***)

Si determini in $\mathbb{R}^4$ il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 \leq -1 \\ x_3 + 2x_1 \geq +2 \\ 2x_3 - x_4 \leq 0 \\ -x_4 - x_3 \leq +3 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 4$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{4!0!} = 1.$$

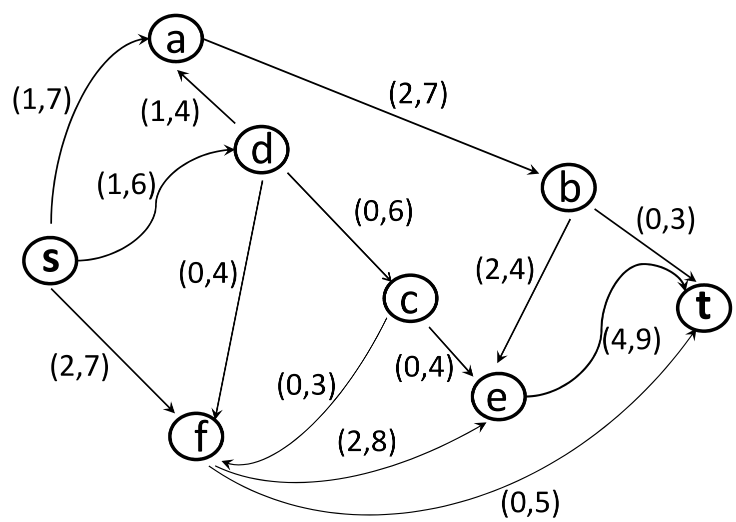
Consideriamo pertanto il solo seguente caso:

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_3 + 2x_1 = +2 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_4 - x_3 = +3. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema lineare precedente (4 equazioni in 4 incognite) risulta avere determinante pari a $6 \neq 0$, pertanto il sistema lineare ammette un'unica soluzione data da $\hat{x} = (3/2,\ -5,\ -1,\ -2)^T$. Questa risulta essere un vertice del poliedro in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5 (***)

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

Dopo una facile verifica si nota che per ciascun nodo (esclusi la sorgente ed il pozzo) il flusso entrante coincide con quello escente. Inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti, pertanto deduciamo che il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 4.$$

È possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso corrispondenti:

- $P_1 = \{s, a, b, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, f, t\}$, con $\delta^+ = 5$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 5$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 12$
- $P_3 = \{s, d, c, e, t\}$, con $\delta^+ = 4$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 4$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 16$
- $P_4 = \{s, d, f, e, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 17$.

Inoltre un taglio a capacià minima è dato dal seguente:

$$W = \{s, a, b, c, d, e, f, \}, \qquad \bar{W} = \{t\},$$

che dopo un immediato controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

Domanda Scritta 1 (***)

Si scriva esplicitamente una formulazione di Programmazione Lineare (PL) per il problema del massimo flusso su grafi orientati. Si discuta inoltre la casistica del Teorema Fondamentale della PL in relazione alla formulazione scritta.

Domanda Scritta 2 (***)

Si enunci il Teorema Fondamentale (TF) della Programmazione Lineare per problemi in *forma standard*. Si dia poi un esempio numerico per ciascuno dei casi contemplati dal TF.

Domanda Scritta 3

Siano $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, funzioni *affini*, con $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Siano dati i coefficienti $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$; si dimostri che la funzione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$$

risulta *convessa* su $\mathbb{R}^n$. Si dica inoltre (motivandolo) se la funzione $f(x)$ risulta a sua volta affine.