Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

5 giugno 2019

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (7 Novembre 2018) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 35'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 15'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - x_6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 \ \leq\ 2.7 \\ & x \in \{0,1\}^6, \end{aligned} \qquad (K_0)$$

e lo si risolva con il metodo del B&B in $\mathbb{R}^6$.

SOLUZIONE:

Considerato il problema (K_0) possiamo assegnare facilmente il valore della variabile x_5, i.e. $x_5 = 1$, in quanto ha segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo. Inoltre poniamo $x_3 = 1 - y_3$, $x_6 = 1 - y_6$, con $y_3, y_6 \in \{0,1\}$, in quanto x_3 ed x_6 sono presenti con segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo. Otteniamo quindi in particolare il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 + y_3 + x_4 + y_6 + 2 \\ & 2x_1 + x_2 + y_3 + 2x_4 + y_6 \ \leq\ 5.7 \\ & x_1, x_2, x_4, y_3, y_6 \in \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_0)$$

Al fine di trovare, per semplice ispezione visiva, una soluzione ammissibile intera per $(\tilde{K}_0)$, poniamo $x_1 = x_2 = x_4 = y_3 = y_6 = 0$: pertanto $(\tilde{K}_0)$ ammette la soluzione intera corrente $\hat{x} = (0,0,1,0,0,1)^T$, con $f(\hat{x}) = 2$.

Creiamo ora la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamo l'unico problema $(\tilde{K}_0)$ ivi contenuto. Consideriamo il suo rilassamento lineare ed ordiniamo in modo non crescente i rapporti dei coefficienti delle 5 variabili x_1, x_2, x_4, y_3, y_6, ottenendo il nuovo ordinamento x_2, x_1, y_3, y_6 e x_4

$$\frac{3}{1} \ \geq\ \frac{2}{2} \ \geq\ \frac{1}{1} \ \geq\ \frac{1}{1} \ \geq\ \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza si passa a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_2 + 2x_1 + y_3 + y_6 + x_4 + 2 \\ & x_2 + 2x_1 + y_3 + y_6 + 2x_4 \ \leq\ 5.7, \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_4, y_3, y_6 \leq 1. \end{aligned}$$

Essendo $h = 4$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$x_2^{(0)} = 1,\ x_1^{(0)} = 1,\ y_3^{(0)} = 1,\ y_6^{(0)} = 1,\ x_4^{(0)} = \frac{5.7 - (1+2+1+1)}{2} = 0.7/2,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $9 + 0.7/2$, quindi superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $x_4 = 0$ e $x_4 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_2 + 2x_1 + y_3 + y_6 + 2 \\ & x_2 + 2x_1 + y_3 + y_6 \ \leq\ 5.7 \\ & x_1, x_2, y_3, y_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_2 + 2x_1 + y_3 + y_6 + 3 \\ & x_2 + 2x_1 + y_3 + y_6 \ \leq\ 3.7 \\ & x_1, x_2, y_3, y_6 \in \{0,1\}, \end{aligned} \qquad (\tilde{K}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{K}_1)$ che, ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $x^{(1)} = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T$ con $f(x^{(1)}) = 9$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente, ponendo $\hat{x} = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T$, con $f(\hat{x}) = 9$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che (con analogo conto) ammette soluzione rilassata data da $x^{(2)} = (1, 1, (1 - 0.7), 1, 1, 1)^T$, con $f(x^{(2)}) = 8.7 < 9 = f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{x}$. Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha

$$x^* = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T, \qquad f(x^*) = 9.$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dove $f(x) = |x-a| + |x^2 - b^2|$ e si hanno per i parametri a, b le relazioni $a > b > 0$. Si dica

- se $f(x)$ è continuamente differenziabile nel proprio dominio;
- in quali intervalli dell'asse reale $f(x)$ risulta convessa;
- se esistono valori di a e b tali che $f(x)$ risulta affine.

SOLUZIONE:

La funzione $f(x)$ è somma di due valori assoluti, pertanto sarà differenziabile ovunque tranne nei punti $x = a$ ed $x = \pm b$. Inoltre, per valutare la convessità della funzione dobbiamo isolare i seguenti sottointervalli dell'asse reale:

- entrambe le quantità nei valori assoluti sono *non-negative* (per $x \geq a$): in tal caso è $f(x) = x - a + x^2 - b^2$, che risulta quindi convessa nell'intervallo convesso $[a, +\infty)$;
- la quantità nel primo valore assoluto è *non-negativa*, mentre la quantità nel secondo valore assoluto è *negativa* (per nessun valore reale di x): pertanto questo caso è impossibile;
- la quantità nel primo valore assoluto è *negativa*, mentre la quantità nel secondo valore assoluto è *non-negativa* (per $x \leq -b$ e per $b \leq x < a$): in tal caso è $f(x) = -x + a + x^2 - b^2$, che risulta quindi convessa (indipendentemente) in ciascuno dei due insiemi convessi $(-\infty, -b]$ e $[b, a)$;
- entrambe le quantità nei valori assoluti sono *negative* (per $-b < x < b$): in tal caso è $f(x) = -x + a - x^2 + b^2$, che risulta quindi *concava* nell'intervallo convesso $(-b, b)$.

Dal momento che per qualsiasi valore di a e b il (unico) monomio x^2 rimane presente nella $f(x)$, la funzione non potrà mai essere affine.

Esercizio 3

Si devono minimizzare i costi di trasporto di due tipi di trattori per uso rurale, dagli stabilimenti di produzione a quattro concessionari diversi. È previsto un costo (Euro) di trasporto per ogni modello di trattore e per ogni concessionario, come riassunto nella seguente tabella:

Tipo trattore	concess. 1	concess. 2	concess. 3	concess. 4
Trattore 1	120	130	125	160
Trattore 2	170	195	185	200

Le modalità con cui il trasporto dei trattori deve avvenire, devono rispettare le seguenti regole:

- ad ogni concessionario devono arrivare almeno 4 trattori del tipo 1 e 5 trattori del tipo 2;
- per ogni tipo di trattore, se ad un concessionario vengono inviati almeno 8 trattori, va pagato (per quel concessionario) un costo fisso aggiuntivo di 400 Euro.
- i trattori del secondo tipo che vanno inviati al concessionario 4 non possono eccedere la somma tra il doppio dei trattori del primo tipo inviati al concessionario 2 ed il doppio dei trattori inviati al concessionario 1.
- risulta necessario inviare almeno 60 trattori del tipo 1 e 19 trattori del tipo 2 ai concessionari. In particolare, almeno 28 trattori vanno inviati ai concessionari 1 e 4;
- per ogni tipo di trattore, al concessionario 3 deve arrivare un numero di trattori almeno pari ad 1/4 dei trattori che arrivano al concessionario 2;

Si formuli un modello di PL/PLI che fornisca la soluzione del problema di minimizzazione per l'invio dei trattori ai concessionari.

SOLUZIONE:

Scelta variabili:

$$y_{ij} = \text{numero di trattori di tipo } i\text{-simo inviati al concessionario } j\text{-simo}, \ i = 1,2, \ j = 1,2,3,4$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se si inviano almeno 8 trattori di tipo } i\text{−simo al concessionario } j = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad 120y_{11} + 130y_{12} + 125y_{13} + 160y_{14} + 170y_{21} + 195y_{22} + 185y_{23} + 200y_{24} + 400\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} z_{ij}$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
&y_{24} \leq 2y_{12} + 2\sum_{i=1}^{2} y_{i1}\\
&\sum_{j=1}^{4} y_{1j} \geq 60,\\
&\sum_{j=1}^{4} y_{2j} \geq 19,\\
&\sum_{i=1}^{2} (y_{i1} + y_{i4}) \geq 28,\\
&y_{i3} \geq \frac{1}{4} y_{i2}, \qquad i = 1, 2\\
&y_{1j} \geq 4, \qquad j = 1, 2, 3, 4\\
&y_{2j} \geq 5, \qquad j = 1, 2, 3, 4\\
&z_{ij} \geq \frac{x_{ij} - 7}{M}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, \qquad M \gg 1\\
&y_{ij} \geq 0,\ intera, \qquad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 (***)

Sia dato il seguente sistema di disequazioni lineari, dove a è un parametro reale, e si motivi il fatto che rappresenta un poliedro in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} y_2 - 3ay_1 \leq 0 \\ 6ay_1 - 2y_2 \geq 0 \\ y_1 - y_2 - y_3 \leq 1 \\ -3y_2 - y_3 \leq +3. \end{cases}$$

Si determini inoltre, se possibile, il valore del parametro a affinchè il poliedro non ammetta vertici.

<u>SOLUZIONE:</u>

Essendo il poliedro, per definizione, l'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi, dal momento che a ciascuna disequazione è associato un semispazio, il sistema di disequazioni dato rappresenta senz'altro un poliedro.

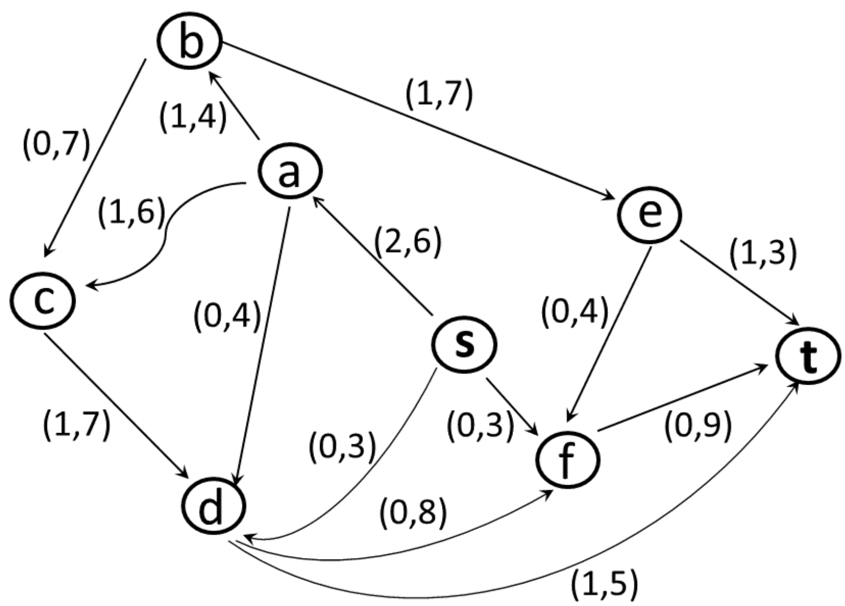
Si noti ora che le prime due disequazioni sono equivalenti (per ottenere la seconda basta infatti moltiplicare la prima per -2), quindi la seconda disequazione è ridondante e può essere ignorata. Rimangono nel poliedro 3 disequazioni in 3 incognite. Affinchè quest'ultimo ammetta vertici, essendo $n = 3$ ed $m = 3$, deve essere non singolare la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} -3a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima ammette determinante nullo se e solo se $a = -1/6$.

Esercizio 5 (***)

Si consideri il seguente grafo: (i) verificare se il vettore di flusso corrente è ammissibile, (ii) calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's' indicando i cammini aumentanti identificati, (iii) indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

(i) Si noti che per ciascun nodo (esclusi la sorgente ed il pozzo) il flusso entrante coincide con quello uscente; inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Per quanto riguarda il punto (ii), il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 2.$$

Inoltre, è possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso indicati di seguito:

- $P_1 = \{s, f, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 5$
- $P_2 = \{s, d, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 8$
- $P_3 = \{s, a, b, e, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 10$
- $P_4 = \{s, a, d, f, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 12.$

Relativamente al punto (iii), un taglio a capacità minima è dato dalla seguente coppia di insiemi:

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{a, b, c, d, e, f, t\},$$

che dopo un immediato controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

Domanda Scritta 1 (***)

Si diano, commentandole, le definizioni di classi di complessità $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ e $\mathcal{NP}$-complete.

Domanda Scritta 2 (***)

Dato il poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, si dia la definizione di vertice. Inoltre si dica se esistono poliedri non limitati che ammettono vertici e si diano esempi numerici di poliedri con, rispettivamente, *un solo* vertice e *due soli* vertici.

Domanda Scritta 3

Si enuncino e si dimostrino le condizioni (necessaria + sufficiente) affinchè il punto $y^* \in \mathbb{R}^n$ sia minimo locale per il problema convesso $\min_{x \in C} f(x)$, dove $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R}^n)$, è convessa su C.