Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

6 giugno 2022

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo complessivo** per la prova è di **1h 20'**.
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - x_4 + x_6 - 5 \\ & 3x_1 - x_2 - x_5 - 2x_6 \ \leq\ 0 \\ & x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1,2,4,5,6, \end{aligned} \tag{K_0}$$

e lo si risolva con il metodo del B&B.

SOLUZIONE:

Passando equivalentemente alla massimizzazione della funzione obiettivo si ha il problema di partenza

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_4 - x_6 + 5 \\ & 3x_1 - x_2 - x_5 - 2x_6 \ \leq\ 0 \\ & x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1,2,4,5,6. \end{aligned} \tag{$\bar{K}_0$}$$

Chiaramente il punto a coordinate intere $\tilde{x} = (0,0,0,0,0)^T$ è ammissibile per il problema e gli corrisponde il valore della funzione obiettivo $\tilde{z} = 5$. Quindi $\tilde{x}$ rappresenta il nostro ottimo corrente del problema. Osservando poi i segni delle variabili del problema $(\bar{K}_0)$ possiamo innanzitutto dedurre che:

- $x_2 = 1$ (infatti x_2 ha segno nullo nella funzione obiettivo, i.e. non influenza quest'ultima, e segno negativo nel vincolo, i.e. contribuisce ad aumentare il termine noto);
- $x_4 = 1$ (infatti x_2 ha segno positivo nella funzione obiettivo, i.e. contribuisce ad aumentarla, e segno nullo nel vincolo, i.e. non influenza quest'ultimo);
- $x_5 = 1$ (infatti x_2 ha segno nullo nella funzione obiettivo, i.e. non influenza quest'ultima, e segno negativo nel vincolo, i.e. contribuisce ad aumentare il termine noto);
- $x_6 = 1 - y_6$ (infatti x_6 ha segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo).

Di conseguenza il problema diventa

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + y_6 + 5 \\ & 3x_1 + 2y_6 \ \leq\ 4 \\ & x_1, y_6 \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{$\tilde{K}_0$}$$

Possiamo ora creare la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$, dalla quale estraiamo l'unico problema $(\tilde{K}_0)$ presente. Ne consideriamo il rilassamento lineare ed ordiniamo in modo non crescente i rapporti dei coefficienti (i.e. $2/3$, $1/2$) delle 2 variabili x_1, y_6, ottenendo il nuovo ordinamento x_1, y_6. Passiamo pertanto a risolvere il problema rilassato (con le variabili riordinate)

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + y_6 + 5 \\ & 3x_1 + 2y_6 \ \leq\ 4, \\ & 0 \leq x_1, y_6 \leq 1. \end{aligned}$$

Si ottiene $h = 1$, da cui per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$ si ha $x_1 = 1$ e $y_6 = 1/2$, cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $\bar{z} = 7.5$. Dal momento che $\bar{z} > 0$ ma a $\bar{z}$ non corrisponde un punto a coordinate intere, allora chiudiamo $(\tilde{K}_0)$ ed effettuiamo il *branching* sulla variabile y_6. Si ottengono i due sottoproblemi (dove rispettivamente $y_6 = 0$ e $y_6 = 1$)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 5 \\
& 3x_1 \ \le \ 4 \\
& x_1 \in \{0,1\},
\end{array}
\qquad (\tilde{K}_1)
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 6 \\
& 3x_1 \ \le \ 2 \\
& x_1 \in \{0,1\},
\end{array}
\qquad (\tilde{K}_2)
$$

che aggiungiamo alla lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema $(\tilde{K}_1)$ che, ragionando come sopra, ammette la soluzione rilassata (coincidente con la soluzione intera) $\bar{x}^{(1)} = (1,1,1,1,1)^T$ con $\bar{z}^{(1)} = 7 > \tilde{z}$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo la soluzione intera corrente, ponendo $\tilde{x} = (1,1,1,1,1)^T$ e $\tilde{z} = 7$. Similmente estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che (con analogo conto) ammette una soluzione rilassata $x^{(2)} = (2/3,1,1,1,0)^T$ (non intera) cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $\bar{z}^{(2)} = 22/3 > 7 = \tilde{z}$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ senza aggiornare l'ottimo corrente $\tilde{x}$. Dal momento che $(\tilde{K}_2)$ contiene solo una variabile, effettuiamo il *branching* sulla variabile x_1, ottenendo banalmente:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6 \\
& 0 \ \le \ 4,
\end{array}
\qquad (\tilde{K}_3)
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & 8 \\
& 3 \ \le \ 2,
\end{array}
\qquad (\tilde{K}_4)
$$

che aggiungiamo alla lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_3), (\tilde{K}_4)\}$. Poichè la soluzione a coordinate intere di $(\tilde{K}_3)$ corrisponde ad un valore della funzione obiettivo inferiore all'ottimo corrente (i.e. $6 < \tilde{z} = 7$), chiudiamo $(\tilde{K}_3)$ senza aggiornare l'ottimo corrente. Similmente, siccome $(\tilde{K}_4)$ risulta inammissibile, lo chiudiamo senza aggiornare l'ottimo corrente.
Essendo ora la lista $\mathcal{L}$ vuota ci fermiamo e per la soluzione finale si ha

$$
x^* = \tilde{x} = (1,1,1,1,1)^T, \qquad z^* = \tilde{z} = 7.
$$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

Siano date le norme $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_+$ in $\mathbb{R}^n$. Si dica (dimostrandolo) se preso un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^n$ ed una qualunque coppia di valori reali positivi a_1, a_2, le funzioni (rispettivamente) $a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+$ e $a_1\|x\|_* - a_2\|x\|_+$ risultano a loro volta norme in $\mathbb{R}^n$.

SOLUZIONE:

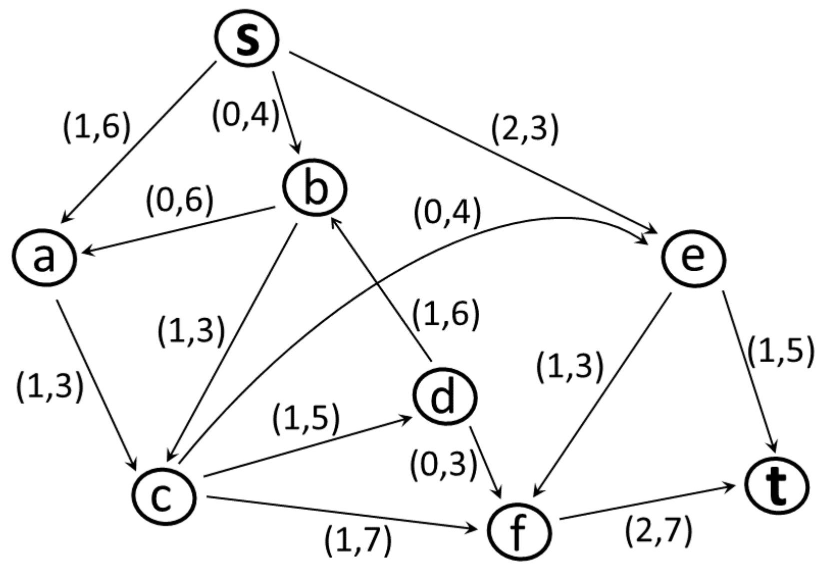
Si osservi che date le ipotesi, per $a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+$ si ha che:

1. $a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+ \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, inoltre $a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+ = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. $a_1\|\alpha x\|_* + a_2\|\alpha x\|_+ = |\alpha|a_1\|x\|_* + |\alpha|a_2\|x\|_+ = |\alpha|(a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $a_1\|x+y\|_* + a_2\|x+y\|_+ \leq a_1(\|x\|_* + \|y\|_*) + a_2(\|x\|_+ + \|y\|_+) = (a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+) + (a_1\|y\|_* + a_2\|y\|_+)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Pertanto la funzione $a_1\|x\|_* + a_2\|x\|_+$ risulta essere una norma in $\mathbb{R}^n$. Invece la funzione $a_1\|x\|_* - a_2\|x\|_+$ non risulta in generale essere una norma in quanto basta prendere $\|\cdot\|_* \equiv \|\cdot\|_+$ ed $a_1 = a_2 > 0$ per non soddisfare la prima proprietà delle norme.

Esercizio 3

Si consideri il seguente grafo: (*i*) verificare se il vettore di flusso corrente è ammissibile, (*ii*) calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's' indicando i cammini aumentanti identificati, (*iii*) indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

(*i*) Si noti che per ciascun nodo (esclusi la sorgente ed il pozzo) il flusso entrante coincide con quello uscente; inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti. Pertanto il vettore di flusso assegnato è ammissibile.
Per quanto riguarda il punto (*ii*), il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 3.$$

Inoltre, è possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso indicati di seguito:

- $P_1 = \{s, e, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 4$
- $P_2 = \{s, a, c, f, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 6$
- $P_3 = \{s, b, c, f, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_3 = f_2 + \delta = 8$
- $P_4 = \{s, b, d, f, t\}$, con $\delta^+ = 1$, $\delta^- = 1$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 1$, da cui $f_3 = f_3 + \delta = 9$.

Infine, relativamente al punto (*iii*), un taglio a capacità minima è dato dalla seguente coppia di insiemi:

$$W = \{s, a, b\}, \qquad \bar{W} = \{c, d, e, f, t\},$$

che dopo un immediato controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}) = 9.$$

Domanda Scritta 1

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa sull'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano x_1, x_2, x_3 tre suoi minimi globali su C. Si dimostri *esplicitamente* (i.e. sfruttando la definizione di funzione convessa) che ogni combinazione convessa dei punti x_1, x_2, x_3 è a sua volta un punto di minimo globale su C.

Domanda Scritta 2

Date le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, lineari su $\mathbb{R}^n$, si dica (dimostrandolo) se la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ è lineare e se i suoi insiemi di livello sono convessi.

Domanda Scritta 3

Si commenti la seguente affermazione confermandone o negandone le conclusioni: *data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile in $\mathbb{R}^n$, dati i punti $x, y \in \mathbb{R}^n$, non esistono due valori reali 'distinti' $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ tali che valgano contemporaneamente le seguenti relazioni:*

$$\begin{cases} f(y) = f(x) + \nabla f[x + \theta_1(y - x)]^T (y - x) \\ \\ f(y) = f(x) + \nabla f[x + \theta_2(y - x)]^T (y - x). \end{cases}$$