Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

7 settembre 2022

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione).
- Il **tempo complessivo** per la prova è di **1h 35'**.
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1

In una raffineria vengono miscelati 4 tipi di gas diversi per ottenere 3 miscele (a, b, c) di GPL da utilizzare per l'autotrazione. Ciascuna miscela sarà venduta su un mercato differente per l'alimentazione di automobili e furgoni. È nota la quantità (metri cubi 'mc') massima ed il costo (Euro/mc) unitario dei 4 tipi di gas, come riassunto dalla seguente tabella:

Tipo gas	MC disponibili	Euro/mq
1	6000	14
2	7800	11
3	5500	16
4	4000	10

Ciascuna delle tre miscele di GPL deve rispettare alcune specifiche in merito alle percentuali dei 4 gas che la compongono. Tali specifiche sono riportate di seguito:

- GPL a: deve contenere almeno il 20% del gas 3 e non più del 30% del gas 2;
- GPL a: se contiene il gas 1 allora deve contenere anche almeno il 25% del gas 3;
- GPL b: non può contenere tutti e 4 i gas disponibili, ma ne deve contenere almeno 3, e tra questi ci deve essere il gas 1;
- GPL b: se contiene il gas 2 (gas 3) deve essere presente anche, nella medesima quantità, il gas 3 (gas 2);
- GPL c: se contiene il gas 1 non deve essere presente anche il gas 2; inoltre, la somma dei gas 3 e 4 presenti nella miscela c non può superare il 25% della miscela stessa.

I GPL vengono venduti rispettivamente al prezzo di 20 Euro/mc (a), 18 Euro/mc (b) e 21 Euro/mc (c): si *cerchi* di determinare un modello di PL che calcoli la miscela ideale dei tre GPL, al fine di massimizzare il profitto dalla loro vendita, sapendo che se si producono più di 200 mc di GPL c si deve pagare una penale (tassa ambientale) pari a 2000 Euro.

<u>SOLUZIONE:</u>

Scelta variabili:

$$y_c = \begin{cases} 1 & \text{se si producono piu' di 200 mq di GPL di tipo 'c'} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \text{percentuale di gas } i\text{-simo usata per unita' di volume (mq) del GPL } j\text{-simo } (i = 1, \dots, 4;\ j = a, b, c)$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il GPL } j-\text{simo contiene il gas } i-\text{simo } i = 1, \dots, 4;\ j = a, b, c \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$g_i = \text{quantita' (mq) di gas } i\text{-simo } (i = 1, \dots, 4) \text{ usata complessivamente}$$

$$GPLj = \text{quantita' (mq) di GPL } j\text{-simo } (j = a, b, c) \text{ prodotta complessivamente}$$

Funzione obiettivo:

$$\min \quad -20GPL_a - 18GPL_b - 21GPL_c + 2000y_c + 14g_1 + 11g_2 + 16g_3 + 10g_4$$

Vincoli:

$$
\begin{aligned}
& y_c \geq \frac{GPL_c - 200}{M}, \quad M \gg 1, \\
& g_1 \leq 6000 \\
& g_2 \leq 7800 \\
& g_3 \leq 5500 \\
& g_4 \leq 4000 \\
& x_{3a} \geq 0.2 \\
& x_{2a} \leq 0.3 \\
& z_{1a} \leq z_{3a} \\
& z_{3a} \geq 0.25 z_{3a} \\
& \sum_{i=1}^{4} z_{ib} = 3 \\
& z_{1b} = 1 \\
& x_{2b} = x_{3b} \\
& z_{1c} + z_{2c} \leq 1 \\
& x_{3c} + x_{4c} \leq 0.25 \\
& g_i = \sum_{j=a}^{c} x_{ij} GPL_j, \quad i = 1, \ldots, 4 \\
& x_{ij} \geq \frac{z_{ij}}{M}, \quad i = 1, \ldots, 4; \; j = a, b, c, \quad M \gg 1 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4; \; j = a, b, c.
\end{aligned}
$$

P.S. Come si vede, stante la scelta sopra delle variabili, NON sembra possibile poter utilizzare esclusivamente vincoli lineari per descrivere il modello, in quanto la relazione tra le quantità $\{g_i\}$ e $\{GPL_j\}$ richiede l'introduzione dei vincoli quadratici $g_i = \sum_{j=a}^{c} x_{ij} GPL_j$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario:

$$\begin{aligned} \min\ & z_1 - z_2 - 2z_5 - 3 \\ & 2z_1 + z_3 + z_4 \geq 3z_5 \\ & z_i \in \{0,1\}^5, \end{aligned} \qquad (K_0)$$

e lo si risolva con il metodo del B&B.

SOLUZIONE:

Passando alla massimizzazione della funzione obiettivo si ha equivalentemente il problema:

$$\begin{aligned} \max\ & -z_1 + z_2 + 2z_5 + 3 \\ & -2z_1 - z_3 - z_4 + 3z_5 \leq 0 \\ & z_i \in \{0,1\}^5, \end{aligned}$$

cui corrisponde una soluzione corrente ottima (scelta euristica) $\tilde{z} = (0,0,0,0,0)^T$, $\tilde{f} = 3$. Ora alcune variabili possono essere assegnate in automatico essendo direttamente:

- $z_1 = (1 - x_1)$, $x_1 \in \{0,1\}$
- $z_2 = 1$ (essendo z_2 presente nel vincolo con coefficiente nullo)
- $z_3 = 1$ (essendo z_3 presente nel vincolo con coefficiente negativo)
- $z_4 = 1$ (essendo z_4 presente nel vincolo con coefficiente negativo)

quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2z_5 + 3 \\ & 2x_1 + 3z_5 \leq 4 \\ & z_1, z_5 \in \{0,1\}, \end{aligned}$$

Che rappresenta il problema iniziale da inserire nella lista dei problemi aperti. Ordinando le variabili in base al rapporto non decrescente (tra coefficienti della funzione obiettivo e coefficienti nel vincolo) si ha

$$\frac{2}{3} \geq \frac{1}{2},$$

e risolvendo quindi il rilassamento lineare del precedente problema si ottiene $z_5 = 1$ e $x_1 = 1/2$. Pertanto si effettua il branching sul problema generando sia il nuovo problema (settando $x_1 = 0$):

$$\begin{aligned} \max\ & 2z_5 + 3 \\ & 3z_5 \leq 4 \\ & z_5 \in \{0,1\}, \end{aligned}$$

che il nuovo problema (settando $x_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \max\ & 2z_5 + 4 \\ & 3z_5 \leq 2 \\ & z_5 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Il primo ha soluzione rilassata intera $z^* = (1,1,1,1,1)$ con $f^* = 5 > 3 = \tilde{f}$, quindi aggiorniamo l'ottimo corrente (i.e. settiamo $\tilde{z} = (1,1,1,1,1,)^T$ e $\tilde{f} = 5$) prima di chiuderlo. Invece il secondo ammette soluzione rilassata NON intera $z^* = (0,1,1,1,2/3)$, e dal momento che gli corrisponde un valore della funzione obiettivo $f^* = 4/3 + 4 > 5$ (essendo $\tilde{f} = 5$ l' ottimo corrente), si deve necessariamente effettuare il branching rispetto alla variabile z_5, ottenendo i due sottoproblemi

$$\begin{aligned} \max\ & 4 \\ & 0 \leq 2 \end{aligned}$$

(settando $z_5 = 0$) e

$$\begin{aligned} \max\ & 2 + 4 \\ & 3 \leq 2 \end{aligned}$$

(settando $z_5 = 1$). Il primo sottoproblema risulta ammissibile, fornendo la soluzione $z^{**} = (0,1,1,1,0)$ con $f^{**} = 4 < 5 = \tilde{f}$ (pertanto non si aggiorna la soluzione ottima corrente). Invece il secondo sottoproblema non risulta ammissibile, pertanto non fornisce alcuna soluzione. Entrambi i sottoproblemi vanno chiusi ed essendo la lista dei problemi aperti vuota si termina il calcolo.

Esercizio 3

Sia dato il parametro reale γ e si consideri il seguente poliedro in $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{P} \quad : \quad \begin{cases} -2x + z \geq -1 \\ \gamma y + x + z \geq 3 \\ 2\gamma y + x \geq 3. \end{cases}$$

Determinare, se possibile, i valori del parametro γ affinchè il punto $u = (1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ NON risulti un vertice del poliedro.

SOLUZIONE:

Il poliedro contiene al massimo un numero di vertici pari a

$$\frac{3!}{3!(1-3)!} = 1.$$

Affinchè il punto u non sia un vertice deve verificarsi almeno una delle seguenti condizioni:

- u non è ammissibile per il poliedro,
- almeno uno dei vincoli non risulta attivo in u,
- i tre vincoli assegnati non sono linearmente indipendenti nel punto u.

Relativamente alla prima condizione, per l'ammissibilità di u deve essere

$$\begin{cases} 2 - 1 \leq 1 \\ \gamma + 1 + 1 \geq 3 \\ 2\gamma + 1 \geq 3 \end{cases}$$

da cui $\gamma \geq 1$. Pertanto, scegliendo $\gamma < 1$ il punto u NON risulta ammissibile e quindi non potrà essere un vertice del poliedro. Inoltre, se $\gamma > 1$ risulta che il secondo vincolo non risulta attivo, quindi scegliendo $\gamma > 1$ di nuovo il punto u non potrà essere un vertice del poliedro.
Relativamente alla terza condizione, basterà imporre la condizione di singolarità

$$0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \gamma & 1 & 1 \\ 2\gamma & 1 & 0 \end{pmatrix} = -5\gamma.$$

Pertanto imponendo $\gamma = 0$ la matrice dei coefficienti associati ai 3 vincoli sarà singolare ed il punto u non potrà essere un vertice.
Riassumendo quindi, basterà prendere un qualunque valore $\gamma \neq 1$ affinchè il punto u NON risulti un vertice.

Domanda Scritta 1

Sia dato il vettore $c \in \mathbb{R}^n$ e la funzione $f(x) = c^T x$. Si consideri anche la funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare su $\mathbb{R}^n$. Si dica (dimostrandolo) se la funzione $h(x) = 2f(x) + g(x)$ è lineare.

Domanda Scritta 2

Siano date le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convesse su $\mathbb{R}^n$, e si consideri il problema di massimizzazione

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} -3f(x) - 6g(x).$$

Si dimostri *esplicitamente* (i.e. usando la definizione di convessità per una funzione) che se x^* e y^* sono massimi *locali* su $\mathbb{R}^n$ del precedente problema di massimizzazione, allora il punto $x^*/2 + y^*/2$ ne è un massimo *globale*.

Domanda Scritta 3

Si enunci e si commenti il Teorema Fondamentale della PL, riferito ad un problema di massimizzazione.