Prova d'Esame di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

15 settembre 2023

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (09 Novembre 2022) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 10'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 30'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

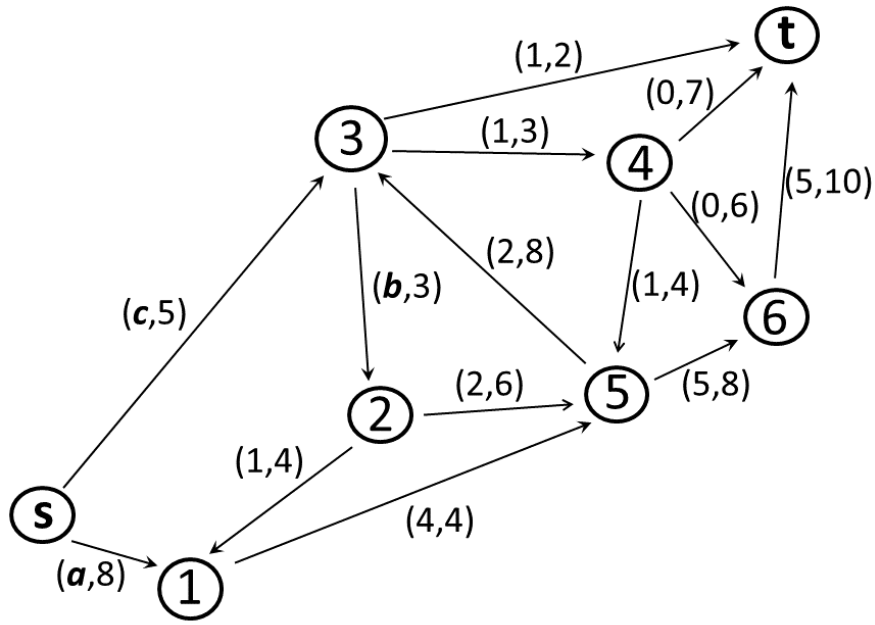
Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1 (***)

Dato il seguente grafo: si trovino (se esistono) valori non negativi per i coefficienti a, b, c tali che il vettore di flusso risulti ammissibile. Calcolare poi il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.



SOLUZIONE:

In ciascun nodo esclusi $\{s, t\}$ è soddisfatto il vincolo di conservazione nel caso in cui risulti $a = b = c = 3$, inoltre lungo ciascun arco risulta anche soddisfatto il relativo vincolo di capacità. Il valore del flusso iniziale è (flusso iniziale uscente da s)

$$F_0 = 6.$$

Alcuni possibili cammini aumentanti, con i relativi valori della variazione del flusso δ apportati, sono elencati di seguito:

- $P_1 = \{s, 3, t\}$, con $\delta = \min\{5 - 3, 2 - 1\} = 1$, da cui $F_1 = F_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, 3, 4, t\}$, con $\delta = \min\{5 - 4, 3 - 1, 7 - 0\} = 1$, da cui $F_2 = F_1 + \delta = 8$
- $P_3 = \{s, 1, 2, 5, 6, t\}$, con $\delta = \min\{8 - 3, 1, 6 - 2, 8 - 5, 10 - 5\} = 1$, da cui $F_3 = F_2 + \delta = 9$.

Inoltre, non è più possibile calcolare ulteriori cammini aumentanti ed è facile verificare che il seguente taglio è a capacità minima:

$$W = \{s, 1\}, \qquad \bar{W} = \{2, 3, 4, 5, 6, t\}.$$

Esercizio 2

Si considerino i punti di $\mathbb{R}^3$ dati da $\bar{x} = (4, 1, 0)$, $\bar{y} = (6, 2, -1)$, e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i + \sum_{i=1}^{3} x_i^2$. Si dica se esiste e (eventualmente) si trovi un punto $\bar{z} \in \mathbb{R}^3$ per il quale valga la relazione $f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{z})^T(\bar{y} - \bar{x})$. Si dica poi (motivandolo) se risulta $f(z) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{z})^T(z - \bar{x})$, per ogni $z \in \mathbb{R}^3$.

SOLUZIONE:

Basta notare che $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pertanto per il Teorema del Valor Medio esiste un valore $\theta \in [0,1]$ tale che

$$f(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \nabla f[\bar{x} + \theta(\bar{y} - \bar{x})]^T(\bar{y} - \bar{x}) = f(\bar{x}) + \nabla f[\bar{z}]^T(\bar{y} - \bar{x}).$$

Essendo poi

$$f(\bar{y}) = 6 + 2 - 1 + 36 + 4 + 1 = 48$$

$$f(\bar{x}) = 4 + 1 + 0 + 16 + 1 + 0 = 22,$$

si avrà anche

$$48 = 22 + \left.\begin{pmatrix} 1+2x_1 \\ 1+2x_2 \\ 1+2x_3 \end{pmatrix}^T\right|_{\bar{z}=\bar{x}+\theta(\bar{y}-\bar{x})} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

che dopo aver svolto i calcoli (i.e. il prodotto scalare) fornisce l'equazione

$$48 = 22 + 2[1 + 2(4 + 2\theta)] + [1 + 2(1 + 1\theta)] - [1 + 2(0 - \theta)] \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = 1/2,$$

da cui $\bar{z} = (5 \quad 3/2 \quad -1/2)$. Infine la funzione $f(x)$ risulta convessa su $\mathbb{R}^3$, in quanto somma di funzioni convesse. Pertanto la rappresentazione geometrica del Teorema del Valor Medio suggerisce direttamente che $f(z) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{z})^T(z - \bar{x})$, per ogni $z \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3 (***)

Si determini in $\mathbb{R}^3$ il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 + x_3 \geq +1 \\ x_2 \leq -2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Essendo $n = 3$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Consideriamo pertanto i seguenti 4 casi:

(I) *escludiamo il primo vincolo* e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

da cui si ottiene il punto (che soddisfa anche il primo vincolo)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Inoltre si ha per il determinante dei vincoli attivi in P_1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_1 *rappresenta un vertice del poliedro assegnato.*

(II) *escludiamo il secondo vincolo* e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

la cui soluzione <u>non soddisfa</u> anche il secondo vincolo.

(III) escludiamo il terzo vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

la cui soluzione <u>non soddisfa</u> anche il terzo vincolo.

(IV) escludiamo il quarto vincolo e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione <u>non soddisfa</u> anche il quarto vincolo.

Pertanto il punto P_1 *rappresenta l'unico vertice del poliedro assegnato.*

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 1}}$ (***)

Si descriva il Metodo del Branch & Bound, specificando a quale problema viene applicato e quali sono i passi (analitici) che prevede.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 2}}$

Sia dato il problema $\max_{x \in C} \left[f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i \right]$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f(x)$ *strettamente concava* su C. Si dimostri che se x^* è un punto di massimo per $f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i$ su C, allora sarà senz'altro anche un massimo globale per $f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i$ su C.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 3}}$ (***)

Si mostri che il problema di massimo flusso su grafi orientati può essere formulato come modello di Programmazione Lineare. Si indichino anche i motivi per cui di solito si preferisce risolvere il problema di massimo flusso mediante un algoritmo ad hoc (introducendo i cammini aumentanti), al posto di risolvere il modello di Programmazione Lineare.