# Prova d'Esame di Ricerca Operativa

**(Prof. Fasano Giovanni)**

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

29 agosto 2018

**Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula**

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- È necessario **scrivere** Nome-Cognome-Matricola sul presente foglio e su **ciascun foglio** contenente le risposte dello studente (i fogli privi di tale informazione saranno cestinati e non considerati per la valutazione). In aggiunta, è necessario indicare (**SI/NO**) se il voto della Prova Intermedia (29 Novembre 2017) deve essere considerato dal docente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 25'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **2h 30'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;
- È **vietato** parlare durante la prova.
- È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili.
- Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cognome: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Matricola: . . . . . . . . . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

## $\boxed{\text{Esercizio 1}}$ (***)

Si risolva il seguente esercizio di Knapsack binario in $\mathbb{R}^6$, con il metodo del B&B.

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \ \leq \ 1.2 \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{array} \qquad (K_0)$$

**<u>SOLUZIONE:</u>**

In $(K_0)$ possiamo senz'altro assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2 = 1 - y_2$, $y_2 \in \{0,1\}$, in quanto è presente con segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo; $x_4^* = 1$, in quanto ha segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo; $x_6^* = 0$, in quanto ha segno positivo nel vincolo e coefficiente nullo nella funzione obiettivo), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + y_2 + x_3 + 2x_5 \\ & x_1 + 2y_2 + 3x_3 + x_5 \ \leq \ 4.2 \\ & x_1, y_2, x_3, x_5 \in \{0,1\}. \end{array} \qquad (\tilde{K}_0)$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione intera corrente $\hat{x} = 0$, con $f(\hat{x}) = 0$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{K}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo non decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili ($x_1$, $y_2$, $x_3$ e $x_5$), i.e.

$$\frac{3}{1} \ \geq \ \frac{2}{1} \ \geq \ \frac{1}{2} \ \geq \ \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + x_3 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 + 3x_3 \ \leq \ 4.2, \\ & 0 \leq x_1, y_2, x_3, x_5 \leq 1. \end{array}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{K}_0)$

$$x_1^{(0)} = 1, \ x_5^{(0)} = 1, \ y_2^{(0)} = 1, \ x_3^{(0)} = \frac{4.2 - (1 + 1 + 2)}{3} = 1/15,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{K}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$)

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_5 + y_2 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 \ \leq \ 4.2 \\ & x_1, y_2, x_5 \in \{0,1\}, \end{array} \qquad (\tilde{K}_1)$$

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + 1 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 \ \leq \ 1.2 \\ & x_1, y_2, x_5 \in \{0,1\}, \end{array} \qquad (\tilde{K}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{K}_1), (\tilde{K}_2)\}$. Estraiamo il primo problema che ammette la soluzione rilassata (coincidente con una soluzione intera) $x^{(1)} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$ con $f(x^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{K}_1)$ ed aggiorniamo $\hat{x} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$, con $f(\hat{x}) = 6$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{K}_2)$ che ammette soluzione rilassata data da $x^{(2)} = (1\ 1\ 1\ 1\ 0.2\ 0)^T$, con $f(x^{(2)}) = 4.4 < 6$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{K}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{x}$. Per la soluzione finale si ha

$$x^* = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T.$$

## $\boxed{\text{Esercizio 2}}$

Si consideri la funzione affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $f(x) = g(x) + 2$ e $g(x)$ lineare. Dati gli insiemi $\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -4 \leq f(x) < 4\}$ e $\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 < f(x) \leq 3\}$. Si dimostri che l'insieme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ è convesso. Inoltre si dica se tale insieme risulta sempre limitato.

**SOLUZIONE:**

L'insieme $\mathcal{L}_1$ può essere riscritto come $\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -6 \leq g(x) < 2\}$. Dal momento che $\mathcal{L}_1$ risulta l'intersezione dei due insiemi di livello (convessi) $\bar{\mathcal{L}}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) < 2\}$ e $\hat{\mathcal{L}}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -g(x) \leq +6\}$ (dove entrambe $g(x)$ e $-g(x)$ risultano lineari e quindi convesse), allora $\mathcal{L}_1$ risulta senz'altro convesso. Un simile ragionamento vale anche per l'insieme $\mathcal{L}_2$, pertanto l'insieme $\mathcal{L}$ risulta convesso in quanto intersezione di due insiemi convessi.

Infine, si osservi che $\mathcal{L}$ potrebbe NON essere limitato, come il semplice contro-esempio seguente mostra: $g(x) = 0^T x$. Pe tale scelta di $g(x)$ infatti, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathbb{R}^n$.

## Esercizio 3

Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con

$$g(z) = z_2 \sqrt{\ln(z_1 - 4 + z_3)}.$$

Si dica (argomentandolo) per quali valori di $z_1, z_2, z_3$ la funzione $g$ ammette derivata direzionale. Inoltre se ne calcoli la derivata direzionale nel punto di coordinate $\bar{z} = (4, 1, 4)^T$, lungo la direzione $d = (1, 1, 1)^T$. Infine si mostri che la derivata direzionale appena calcolata coincide con la somma delle derivate parziali della $g$ nel punto $\bar{z}$.

**SOLUZIONE:**

La funzione $g(x)$ ammette senz'altro derivata direzionale nel caso in cui $z1 - 4 + z_3 > 1$ ovvero $z1 + z_3 > 5$, in quanto ivi esiste sia la funzione che il suo gradiente. Inoltre, per $\nabla g(z)$ si ha in un intorno del punto $\bar{z}$

$$\nabla g(z) = \begin{pmatrix} z_2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(z_1 - 4 + z_3)}} \cdot \dfrac{1}{z_1 - 4 + z_3} \\[2ex] \sqrt{\ln(z_1 - 4 + z_3)} \\[2ex] z_2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(z_1 - 4 + z_3)}} \cdot \dfrac{1}{z_1 - 4 + z_3} \end{pmatrix},$$

con $\nabla g(\bar{z}) = (1/[8\sqrt{\ln(4)}] \quad \sqrt{\ln(4)} \quad 1/[8\sqrt{\ln(4)}])^T$, ed in $\bar{z}$ si ha

$$D(g, d) = \nabla g(\bar{z})^T d = 1/[4\sqrt{\ln(4)}] + \sqrt{\ln(4)} \approx 1,39.$$

Infine è immediato verificare che la derivata direzionale appena calcolata coincida con la somma delle derivate parziali della $g$ nel punto $\bar{z}$.

## $\boxed{\text{Esercizio 4}}$

Si determini in $\mathbb{R}^4$ il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} 4x_3 \leq -2 \\ 2x_3 + 2x_1 \geq +1 \\ x_3 - 2x_1 \leq 0 \\ -x_4 - x_3 \leq 1 \end{cases}$$

**SOLUZIONE:**

Essendo $n = 4$ ed $m = 4$, il massimo numero possibile di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{4!0!} = 1.$$

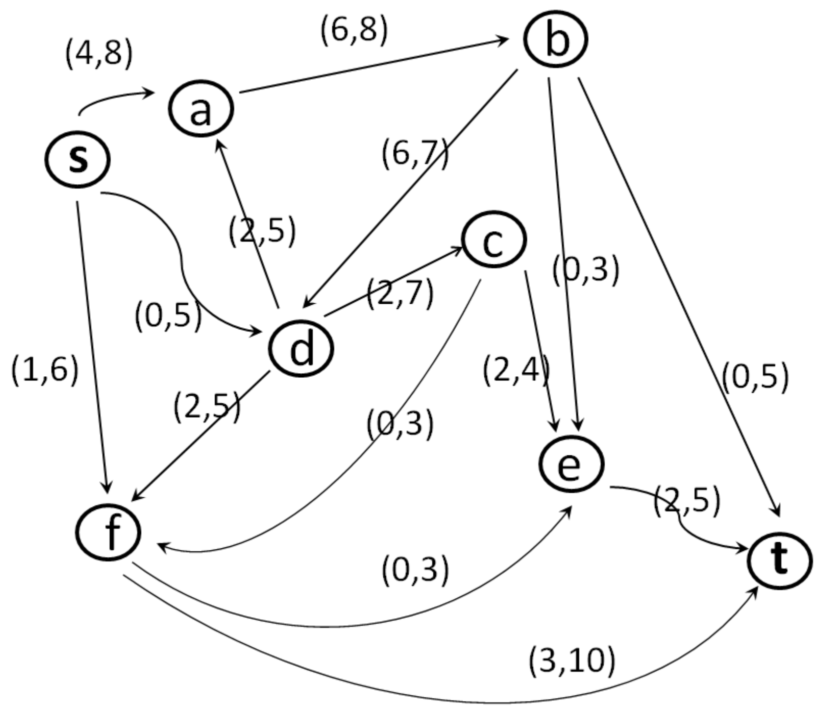
Consideriamo pertanto il solo seguente caso:

$$\begin{cases} 4x_3 = -2 \\ 2x_3 + 2x_1 = 1 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \\ -x_4 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Dal momento che la matrice dei coefficienti del sistema lineare precedente risulta avere 4 righe e tre colonne, non potrà mai avere rango 4, pertanto un eventuale punto soluzione del precedente sistema lineare NON può essere vertice. Si conclude che il sistema lineare assegnato non può ammettere vertici in $\mathbb{R}^4$.

## Esercizio 5 (***)

Dato il seguente grafo: verificare se il vettore di flusso è ammissibile, calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio a capacità minima del grafo.




**SOLUZIONE:**

Dopo una facile verifica si nota che per ciascun nodo il flusso entrante coincide con quello escente. Inoltre i vincoli sulla capacità di ciascun arco sono soddisfatti, pertanto deduciamo che il vettore di flusso assegnato è ammissibile.

Il valore del flusso iniziale è

$$f_0 = 5.$$

È possibile considerare i seguenti cammini aumentanti ed i relativi valori del flusso corrispondenti:

- $P_1 = \{s, a, b, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_1 = f_0 + \delta = 7$
- $P_2 = \{s, f, t\}$, con $\delta^+ = 5$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 5$, da cui $f_2 = f_1 + \delta = 12$
- $P_3 = \{s, d, c, e, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = +\infty$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_3 = f_1 + \delta = 14$
- $P_4 = \{s, d, b, t\}$, con $\delta^+ = 3$, $\delta^- = 6$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3$, da cui $f_4 = f_3 + \delta = 17$
- $P_5 = \{s, a, d, f, t\}$, con $\delta^+ = 2$, $\delta^- = 2$ e $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 2$, da cui $f_5 = f_4 + \delta = 19$.

Inoltre un taglio a capacià minima è dato dal seguente:

$$W = \{s\}, \qquad \bar{W} = \{a, b, c, d, e, f, t\},$$

che dopo un facile controllo soddisfa infatti la condizione

$$F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

## $\boxed{\textbf{Domanda Scritta 1}}$

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $f(x)$ convessa su $\mathbb{R}^n$. Si mostri che presi *comunque* i punti $w \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^n$ di minimo globale per $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, allora anche il punto

$$t = \frac{1}{3}w + \frac{2}{3}z$$

è un minimo globale di $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

## $\boxed{\textbf{Domanda Scritta 2}}$ (***)

Si descriva il problema del Flusso Massimo su grafi orientati e se ne dia una formulazione come modello di Programmazione Lineare. Inoltre, si dica (argomentandolo) se il metodo di Ford e Fulkerson metodo può essere usato per risolvere problemi di flusso minimo su grafi orientati.